

## **Laboratorium Sterowania Robotów**

### **Laboratorium nr 09**

**Temat:** Algorytm PID , **PD + kompensacja sił grawitacji** w sterowaniu ruchem nadążnym manipulatora dwuczłonowego

Celem tematyki laboratorium jest zapoznanie i testowanie metody linearyzacji sprzężeniem zwrotnym stosowanej w sterowaniu robotów.

### A. Sterowanie PID + WM

Metodę wyliczaniego momentu zastosujemy w sterowaniu ruchem nadążnym manipulatora dwuczłonowego, którego dynamika jest opisana równaniem

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\tau}, \quad (1)$$

gdzie  $\boldsymbol{\tau}$  to wektor sterowań,  $\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q})$ . Dla uproszczenia pominięto w modelu wpływ zakłóceń. Przyjmijmy, że znamy zadaną trajektorię ruchu  $\mathbf{q}_d$  we współrzędnych konfiguracyjnych robota. Wybierzmy sterowanie z uwzględnieniem kompensacji nieliniowości obiektu (linearyzujemy obiekt sterowania) w postaci

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}(\mathbf{q})(\ddot{\mathbf{q}}_d - \mathbf{u}) + \mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad (2)$$

Jeżeli wybierzemy w miejsce  $\mathbf{u}$  w równaniu (2) formę sterowania PD

$$-\mathbf{u} = \mathbf{K}_p \mathbf{e} + \mathbf{K}_D \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_I \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{e}, \quad (3)$$

to otrzymamy sterowanie, będące momentami napędzającymi człony manipulatora

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}(\mathbf{q})(\ddot{\mathbf{q}}_d + \mathbf{K}_p \mathbf{e} + \mathbf{K}_D \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_I \boldsymbol{\varepsilon}) + \mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (4)$$

Definiując wektor stanu układu zamkniętego  $\mathbf{x} = [\boldsymbol{\varepsilon}^T, \mathbf{e}^T, \dot{\mathbf{e}}^T]^T$ , dynamiczne równania błędów układu zamkniętego zapiszemy jako

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \mathbf{e} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{K}_I & -\mathbf{K}_p & -\mathbf{K}_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \mathbf{e} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{w} \quad (5)$$

Natomiast równanie charakterystyczne układu zamkniętego będzie postaci

$$\Delta(s) = s^3 \mathbf{I} + \mathbf{K}_D s^2 + \mathbf{K}_p s + \mathbf{K}_I \quad (6)$$

Jeżeli wybierzemy wzmocnienia regulatora PID jako

$$\mathbf{K}_D = \text{diag}\{k_{Di}\}, \quad \mathbf{K}_p = \text{diag}\{k_{pi}\}, \quad \mathbf{K}_I = \text{diag}\{k_{Ii}\} \quad (7)$$

wówczas równanie charakterystyczne układu zamkniętego będzie

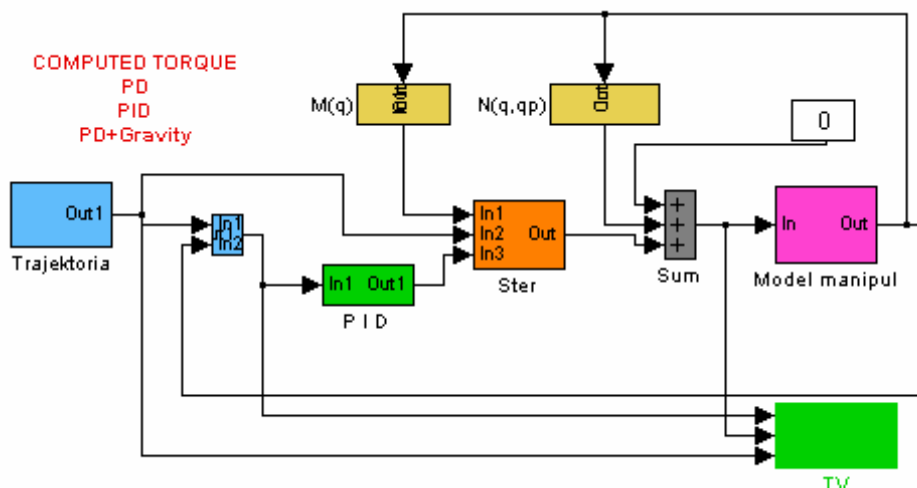
$$\Delta(s) = \prod_{i=1}^n (s^3 + k_{Di} s^2 + k_{pi} s + k_{Ii}) \quad (8)$$

Stosując **kryterium stabilności Routha**, w celu uzyskania stabilności układu zamkniętego, wybieramy wzmocnienie regulatora całkującego spełniającego warunek

$$k_{Ii} < k_{Di} k_{pi} \quad (9)$$

Wybierając macierze  $\mathbf{K}_p$ ,  $\mathbf{K}_D$ ,  $\mathbf{K}_I$  jako diagonalne, stabilność układu sterowania jest zapewniona jeżeli elementy tych macierzy będą dodatnie.

Schemat sterownika typu PID + WM pokazano na rys.1.



Rys.1. Sterownik typu PID + WM

Obiektem sterowania jest dwuczłonowy manipulator opisany równaniem (2) gdzie wektory i macierze mają następującą formę

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \cos(q_2 - q_1) \\ a_2 \cos(q_2 - q_1) & a_3 \end{bmatrix}, \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} 0 & -a_2 \sin(q_2 - q_1) \dot{q}_2 \\ a_2 \sin(q_2 - q_1) \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} a_4 \dot{q}_1 \\ a_5 \dot{q}_2 \end{bmatrix}, \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} a_6 \cos q_1 \\ a_7 \cos q_2 \end{bmatrix}, \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}.$$

Dane do symulacji:

Tab.1.

	A	B	C	D	E	F	G	H
$K_{P1}$	25	16	9	9	25	36	16	16
$K_{P2}$								
$K_{D1}$	10	8	6	6	10	12	8	8
$K_{D2}$								
$K_{I1}$	10	5	4	3	6	10	8	6
$K_{I2}$								
$D_1$	0.1	0.05	0.05	0	0.1	0.2	0.1	-0.1
$D_2$	0.1	0.05	-0.05	0.1	0.1	-0.2	0.1	-0.1

- Wykorzystać zbudowany na poprzednich laboratoriach model zadania odwrotnego kinematyki i dynamiki manipulatora.
- Zaprojektować algorytm sterowania PID + WM z wykorzystaniem pakietu Matlab/Simulink, przyjmując sterowanie (4).
- Sporządzić wykresy:  $q_{1d}(t)$ ,  $q_{2d}(t)$ ,  $\dot{q}_{1d}(t)$ ,  $\dot{q}_{2d}(t)$ ,  $\ddot{q}_{1d}(t)$ ,  $\ddot{q}_{2d}(t)$ ,  $q_1(t)$ ,  $q_2(t)$ ,  $\dot{q}_1(t)$ ,  $\dot{q}_2(t)$ ,  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  oraz  $e_1(t)$ ,  $e_2(t)$ ,  $\dot{e}_1(t)$ ,  $\dot{e}_2(t)$ , zamieścić charakterystyki w przestrzeni błędów  $\mathbf{e}(t), \dot{\mathbf{e}}(t) \in \mathbb{R}^2$ .
- Dodać do układu zakłócenie  $\mathbf{D} = [D_1, D_2]^T$  w czasie  $t_k / 2$ , gdzie  $t_k$  to całkowity czas ruchu, i sporządzić wykresy jak w p. 3.

**Do oceny ilościowej generowanego sterowania** oraz realizacji założonego ruchu, przyjąć następujące wskaźniki jakości:

- pierwiastek błędu średniokwadratowego (RMSE) błędów nadążania  $e_1 = q_{1d} - q_1$ ,  $e_2 = q_{2d} - q_2$ ,

$$\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varepsilon_{1k}^2}, \quad \varepsilon_2 = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varepsilon_{2k}^2} \quad [\text{rad}], \text{ gdzie } k - \text{ to numer kolejnych dyskretnych pomiarów, } n - \text{ całkowita}$$

liczba dyskretnych pomiarów,

- pierwiastek błędu średniokwadratowego pochodnych błędów  $\dot{\varepsilon}_1 = \dot{q}_{1d} - \dot{q}_1, \dot{\varepsilon}_2 = \dot{q}_{2d} - \dot{q}_2,$

$$\dot{\varepsilon}_1 = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \dot{\varepsilon}_{1k}^2}, \quad \dot{\varepsilon}_2 = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \dot{\varepsilon}_{2k}^2} \quad [\text{rad/s}],$$

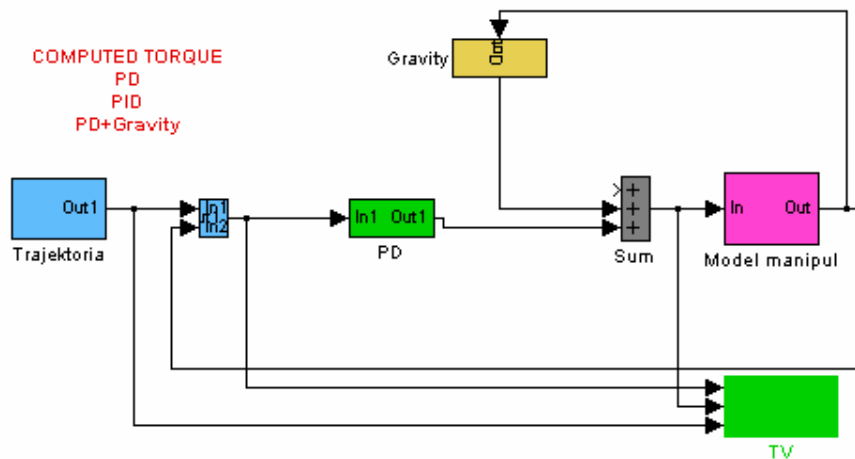
### B. Synteza sterowania PD + kompensacja sił grawitacji

W pewnych przypadkach pożądanym jest uproszczenie równań ruchu przez zaniechanie pewnych wyrazów w równaniach, tak aby przyspieszyć obliczanie sterowania. Jednym z przykładów zastosowania aproksymacji w metodzie wyliczanej momentu jest sterowanie typu PD + kompensacja sił grawitacji.

Przyjmując w równaniu (III.16) założenie upraszczające  $M = I, N(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{G}(\mathbf{q})$ , wybieramy sterowanie

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{K}_P \mathbf{e} + \mathbf{K}_D \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) \quad (10)$$

Implementację tego sterowania pokazano na rys. 2.



Rys.2. Blokowy schemat sterownika typu PD+G(q)

Przyjmując dane podane w Tab.1, zrealizować punkty 1 do 4 z punktu A. **Do oceny ilościowej generowanego sterowania** oraz realizacji założonego ruchu, przyjąć wskaźniki jakości tak jak w punkcie A.

#### Sprawozdanie powinno zawierać:

- opis matematyczny rozwiązywanego problemu,
- dane przyjęte w symulacji,
- listingi programów,
- otrzymane wykresy (każdy wykres powinien być opisany i skomentowany),
- wnioski.