Katedra Mechaniki Stosowanej i Robotyki
Wydział Budowy Maszyn i Lotnictwa, Politechnika Rzeszowska

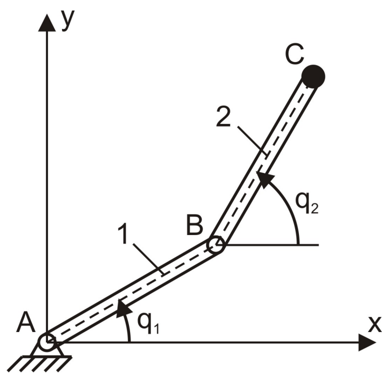
Laboratorium Sterowania Robotów

Laboratorium nr 03

Temat: Zadanie odwrotne kinematyki manipulatora dwuczłonowego

Wprowadzenie

Rozważmy manipulator dwuczłonowy z parami obrotowymi pokazany na rys. 1.



Rys. 1. Manipulator 2-członowy z parami obrotowymi

Do opisu ruchu manipulatora w przestrzeni konfiguracyjnej zastosowano współrzędne uogólnione q_1 i q_2, które wybrano jak pokazano na rys. 1. Współrzędne uogólnione to kąty obrotu członów manipulatora mierzone od poziomej osi x układu odniesienia.

W przypadku manipulatora pokazanego na rysunku, współrzędne wybranego punktu C w układzie odniesienia będą określone przez następujące równania

$$\begin{cases} x_C = l_1 \cos q_1 + l_2 \cos q_2 \\ y_C = l_1 \sin q_1 + l_2 \sin q_2 \end{cases} \tag{1}$$

gdzie l_1 i l_2 to długości członów manipulatora. Różniczkując równania (1) otrzymano rzuty prędkości punktu C na osie układu odniesienia

$$\begin{cases} V_{Cx} = \dot{x}_C = -l_1 \dot{q}_1 \sin q_1 - l_2 \dot{q}_2 \sin q_2 \\ V_{Cy} = \dot{y}_C = l_1 \dot{q}_1 \cos q_1 + l_2 \dot{q}_2 \cos q_2 \end{cases} \tag{2}$$

a wartość prędkości punktu C to

$$V_C = \sqrt{V_{Cx}^2 + V_{Cy}^2} \tag{3}$$

Zadanie odwrotne kinematyki formułowane jest w następujący sposób. Niech tor ruchu punktu C będzie zdefiniowany jako

$$f_C(x_C, y_C) = 0 \tag{4}$$

Prędkość punktu C w układzie xy to

$$\overline{V}_C = \begin{bmatrix} V_{Cx} \\ V_{Cy} \end{bmatrix} \tag{5}$$

a jej wartość określa wzór (3). Aby prędkość punktu C była realizowalna, wektor prędkości musi być styczny do toru ruchu, zatem musi być spełnione następujące równanie

$$\operatorname{grad} f_C \overline{V}_C = 0 \tag{6}$$

czyli po uwzględnieniu równań (4) i (5) będzie ono miało postać

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_C}{\partial x_C} & \frac{\partial f_C}{\partial y_C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{Cx} \\ V_{Cy} \end{bmatrix} = 0 \tag{7}$$

Oznaczając $f_x = \frac{\partial f_C}{\partial x_C}$ i $f_y = \frac{\partial f_C}{\partial y_C}$ otrzymamy równanie

$$f_x V_{Cx} + f_y V_{Cy} = 0 \tag{8}$$

Spełnienie tego równania jest gwarancją styczności wektora prędkości do toru ruchu. Rozwiązując równanie (3) i (8) otrzymano

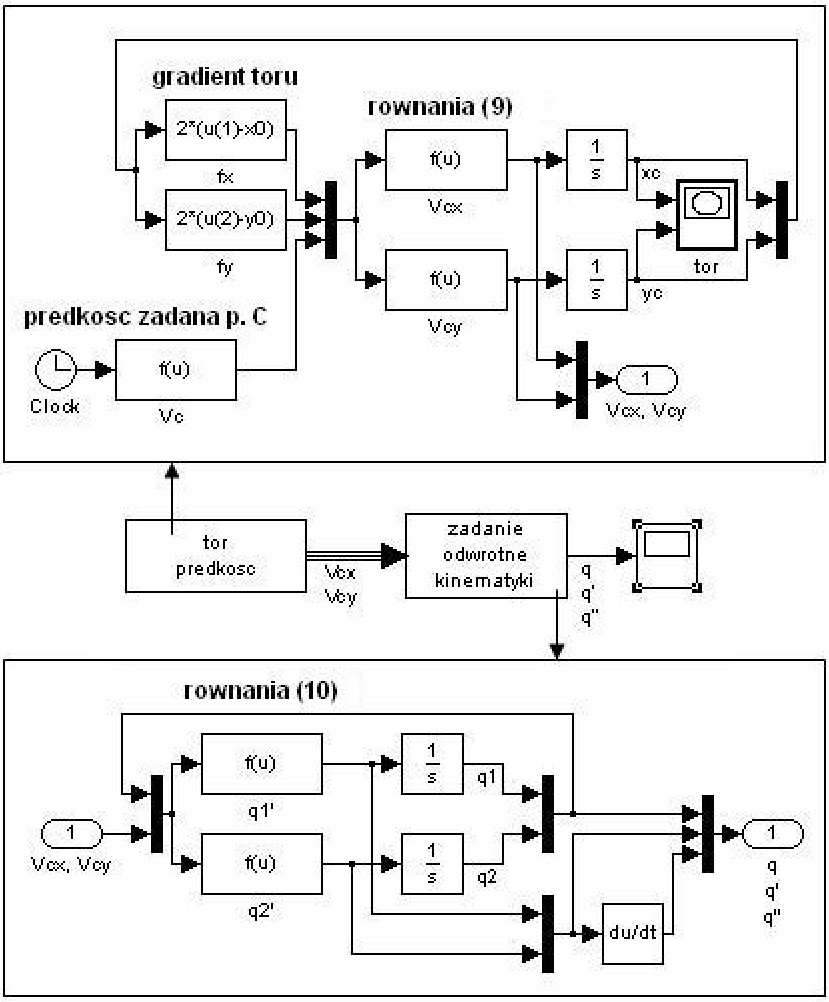
$$\begin{cases} V_{Cx} = \dot{x}_C = \mp \dfrac{f_y V_C}{\sqrt{f_x{}^2 + f_y{}^2}} \\ V_{Cy} = \dot{y}_C = \pm \dfrac{f_x V_C}{\sqrt{f_x{}^2 + f_y{}^2}} \end{cases} \tag{9}$$

Rozwiązanie układu równań różniczkowych (9) pozwala określić, jak zmieniają się składowe wektora prędkości oraz współrzędne punktu C dla zadanego toru ruchu i wartości prędkości tego punktu. Teraz przekształcając układ równań (2) określono prędkości uogólnione (prędkości kątowe) członów

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = -\dfrac{V_{Cx}\cos q_2 + V_{Cy}\sin q_2}{l_1 \sin(q_1 - q_2)} \\ \dot{q}_2 = \dfrac{V_{Cx}\cos q_1 + V_{Cy}\sin q_1}{l_2 \sin(q_1 - q_2)} \end{cases} \tag{10}$$

Rozwiązując układ równań różniczkowych (10) można określić współrzędne uogólnione i prędkości uogólnione a różniczkując otrzymane prędkości uogólnione można wyznaczyć przyspieszenia uogólnione. Należy zauważyć, że rozwiązanie układu równań nie będzie możliwe w przypadku gdy wyrażenie $\sin(q_1 - q_2)$ będzie równe 0, tzn. gdy $q_1 = q_2 + k\pi$, $k = 1,2,3,\ldots$. Występuje wówczas konfiguracja osobliwa manipulatora, której interpretacja geometryczna jest taka, że osie członów 1 i 2 są równoległe.

Na rys. 2 przedstawiono schemat rozwiązania zadania odwrotnego kinematyki.



Rys.2. Schemat realizacji zadania odwrotnego kinematyki

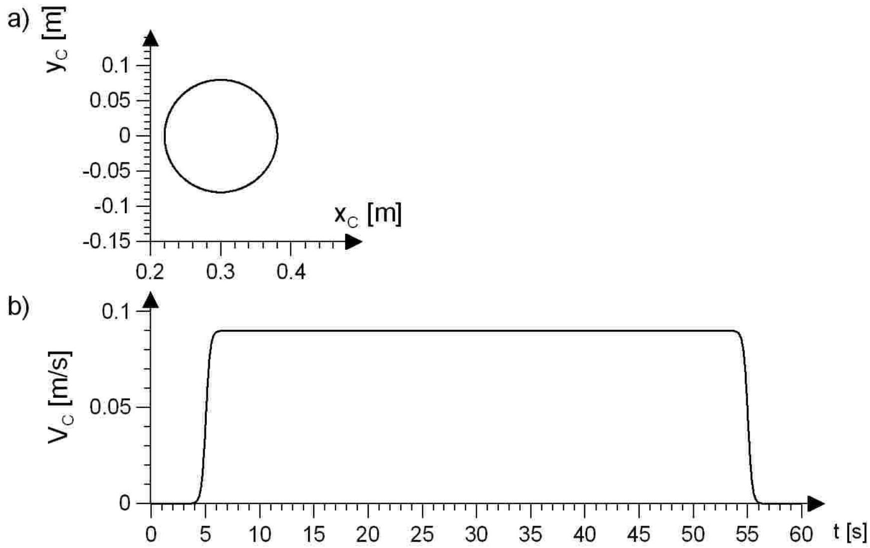
Rozwiążmy zadanie odwrotne kinematyki dla następujących warunków. Załóżmy, że punkt C manipulatora ma poruszać się po okręgu opisanym równaniem

$$f_C : (x_C - x_0)^2 + (y_C - y_0)^2 - R^2 = 0 \tag{11}$$

gdzie $x_0 = 0.3\,[\mathrm{m}]$ i $y_0 = 0\,[\mathrm{m}]$ to współrzędne środka okręgu, $R = 0.08\,[\mathrm{m}]$ to promień okręgu. Dla zadanego toru będzie $f_x = \frac{\partial f_C}{\partial x_C} = 2(x_C - x_0)$, $f_y = \frac{\partial f_C}{\partial y_C} = 2(y_C - y_0)$. Prędkość punktu C określona jest wzorem

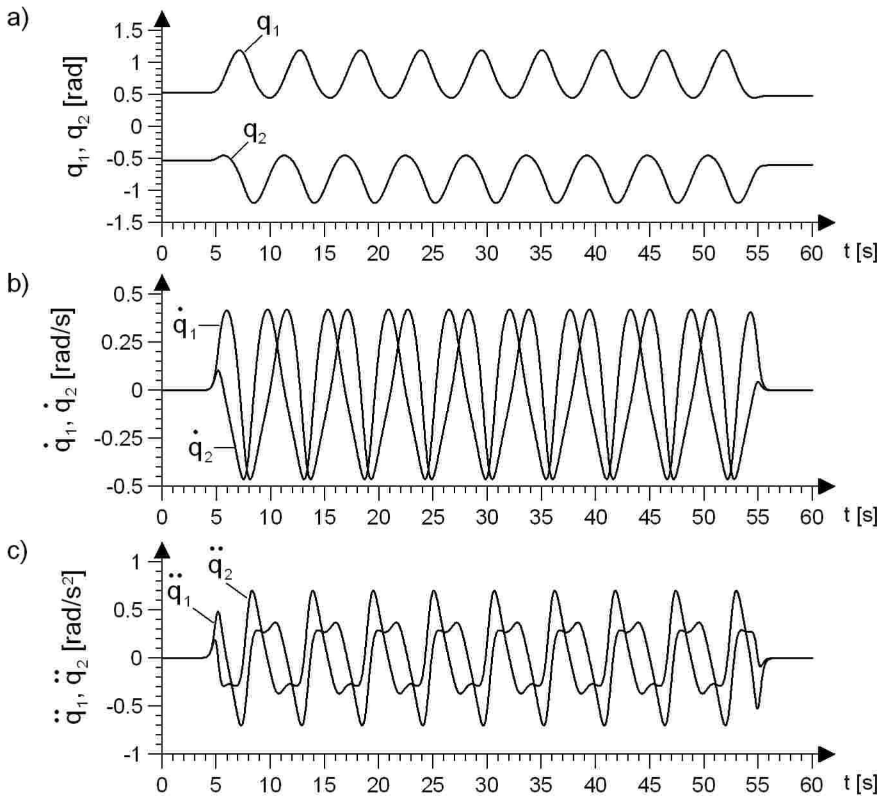
$$V_C = v_C\left[\frac{1}{1+\exp(-c(t-t_1))} - \frac{1}{1+\exp(-c(t-t_2))}\right], \quad t \in \langle 0, t_k \rangle\,[\mathrm{s}] \tag{12}$$

gdzie $v_C = 0.09\,[\mathrm{m/s}]$, $t_1 = 5\,[\mathrm{s}]$, $t_2 = 55\,[\mathrm{s}]$, $t_k = 60\,[\mathrm{s}]$, $c = 5\,[1/\mathrm{s}]$ to współczynnik wpływający na szybkość zmiany prędkości podczas rozpędzania i hamowania. Zadany tor ruchu i zadaną prędkość punktu C przedstawiono na rys. 3.



Rys. 3. a) zadany tor ruchu punktu C, b) zadana prędkość punktu C

W symulacji przyjęto $l_1 = l_2 = 0.22\,[\mathrm{m}]$, warunki początkowe dla układu równań (9) $x_C(0) = 0.38\,[\mathrm{m}]$, $y_C(0) = 0\,[\mathrm{m}]$, warunki początkowe dla układu równań (10) $q_1(0) = 0.5284\,[\mathrm{rad}]$, $q_2(0) = -0.5284\,[\mathrm{rad}]$. Uzyskane rozwiązanie zadania odwrotnego kinematyki przedstawiono na rys. 4.



Rys. 4. Rozwiązanie zadania odwrotnego kinematyki: a) współrzędne uogólnione, b) prędkości uogólnione, c) przyspieszenia uogólnione

Zadania do wykonania

1. Na podstawie podanych zależności zbudować z wykorzystaniem pakietu Matlab/Simulink model realizujący zadanie odwrotne kinematyki manipulatora dwuczłonowego, przyjmując tor ruchu punktu C wg wzoru (11) oraz prędkość punktu C wg wzoru (12)
2. Przedstawić na wykresach następujące przebiegi: tor ruchu punktu C, prędkość punktu C, współrzędne uogólnione (kąty obrotu członów) $q_1(t)$, $q_2(t)$, prędkości uogólnione $\dot{q}_1(t)$, $\dot{q}_2(t)$ i przyspieszenia uogólnione $\ddot{q}_1(t)$, $\ddot{q}_2(t)$.

Sprawozdanie powinno zawierać opracowanie powyższych punktów i wnioski.

Dane do symulacji:

	A	B	C	D	E	F	G	H
v_C [m/s]	0.1	0.05	0.1	0.06	0.08	0.08	0.05	0.05
c[1/s]	8	8	8	8	8	8	8	8
t_k [s]	30	30	30	30	30	30	30	30
t_1 [s]	1	1	1	1	1	1	1	1
t_2 [s]	29	29	29	29	29	29	29	29
$x_C(0)$[m]	0.22	0.22	0.11	-0.22	0	-0.05	-0.05	-0.22
$y_C(0)$[m]	0.22	0.22	0	0.22	0.4	0	0	0.22
x_0 [m]	0.22	0.22	0.22	-0.17	0	-0.23	-0.1	-0.25
y_0 [m]	0.11	0.27	0	0.17	0.31	0	0	0.25
l_1 [m]	0.22							
l_2 [m]	0.22							
$q_1(0)$[rad]	0	$\pi/2$	1.3181	$\pi/2$	2.0005	1.6847	1.6847	π
$q_2(0)$[rad]	$\pi/2$	0	-1.3181	π	1.1411	4.5985	4.5985	$\pi/2$