

ZASTOSOWANIA GEOMETRYCZNE CAŁKI OZNACZONEJ

zadania przykładowe

1. POLE OBSZARU PŁASKIEGO

Obliczyć pole obszaru:

- A) zawartego między krzywymi $y = x^3$, $y = 4x$ (UWAGA: mamy dwa symetryczne obszary, więc wystarczy znaleźć pole jednego z nich i pomnożyć przez 2)
- B) zawartego między parabolami $y^2 = x$, $x^2 = 8y$
- C) ograniczonego krzywymi $y = 2x^3$, $y^2 = 4x$
- D) ograniczonego parabolą $y = 2x - x^2$ i prostą $x + y = 0$
- E) zawartego między hiperbolą $xy = 4$ a prostą $x + y = 5$

2. OBJĘTOŚĆ I POLE POWIERZCHNI BOCZNEJ BRYŁY OBROTOWEJ

Obliczyć:

- A) objętość i pole powierzchni bocznej bryły obrotowej powstałej w wyniku obrotu dookoła osi Ox krzywej

$$y = \sqrt{4 - x^2} \quad \text{dla} \quad -1 \leq x \leq 1$$

- B) objętość bryły obrotowej powstałej w wyniku obrotu dookoła osi Ox krzywej

$$y = \frac{1}{x-1} \quad \text{dla} \quad 2 \leq x \leq 4$$

- C) pole powierzchni bocznej bryły obrotowej powstałej w wyniku obrotu dookoła osi Ox krzywej

$$y = \sqrt{2x - x^2} \quad \text{dla} \quad 0 \leq x \leq 2$$

- D) objętość i pole powierzchni bocznej bryły obrotowej powstałej w wyniku obrotu dookoła osi Ox krzywej

$$y = \frac{1}{3}x^3 \quad \text{dla} \quad 0 \leq x \leq 1$$

Wskazówka: licząc pole powierzchni bocznej wykorzystać całkowanie przez podstawienie.

- E) objętość bryły obrotowej powstałej w wyniku obrotu dookoła osi Ox krzywej

$$y = \sin^{\frac{3}{2}}x \quad \text{dla} \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

Wskazówka: wykorzystać całkowanie przez podstawienie.

- F) objętość bryły obrotowej powstałej w wyniku obrotu dookoła osi Ox krzywej

$$y = \sqrt{x}\left(1 - \frac{x}{3}\right) \quad \text{dla} \quad 1 \leq x \leq 3$$

3. DŁUGOŚĆ ŁUKU KRZYWEJ

Obliczyć długość łuku krzywej:

- A)

$$y = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{dla} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

B)

$$y = \sqrt{x^3} \text{ dla } 0 \leq x \leq 12$$

Wskazówka: wykorzystać całkowanie przez podstawienie.

C)

$$y = \frac{x^4}{4} + \frac{1}{8x^2} \text{ dla } 1 \leq x \leq 2$$

Wskazówka: aby uzyskać potęgę 2 pod pierwiastkiem i pozbyć się pierwiastka można wykorzystać wzór skróconego mnożenia.

D)

$$y = \ln x \text{ dla } 1 \leq x \leq e$$

Wskazówka: zastosować podstawienie $\sqrt{1+x^2} = t$ otrzymując całkę z funkcji wymiernej.

E)

$$y = 2y^2 - 3x^3 = 0 \text{ dla } 0 \leq x \leq 2$$

Wskazówka: wykorzystać całkowanie przez podstawienie.

F)

$$y = \ln(\sin x) \text{ dla } \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$$

Wskazówka: wykorzystać całkowanie przez podstawienie otrzymując całkę z funkcji wymiernej.