Informatyka
WYKŁAD 12

UKŁADY RÓWNAŃ LINIOWYCH

Układ m równań liniowych o n niewiadomych $x_1, x_2, \dots, x_n$ (gdzie $m, n \in \mathbb{N}$) to układ równań postaci:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

gdzie $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $b_i \in \mathbb{R}$ dla $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$.

Rozwiązanie układu równań liniowych to ciąg

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

liczb rzeczywistych spełniających ten układ.

Układ sprzeczny to układ równań, który nie ma rozwiązania.

Układ równań (*) można zapisać w postaci macierzowej

$$A \cdot X = B,$$

gdzie:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

macierz główna układu równań — kolumna niewiadomych — kolumna wyrazów wolnych

Gdy mamy małą liczbę niewiadomych, to zamiast oznaczać je: $x_1, x_2, \dots, x_n$ piszemy $x, y, z, t, \dots$

Jeżeli $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, to układ równań nazywamy **układem jednorodnym**. W przeciwnym wypadku układ nazywamy **niejednorodnym**.

Układy Cramera

Definicja Układ Cramera to układ równań liniowych $A \cdot X = B$, gdzie A jest macierzą kwadratową o $\underbrace{\text{wyznaczniku różnym od zera.}}_{\det A \neq 0}$

Twierdzenie Układ Cramera ma dokładnie jedno rozwiązanie. Rozwiązanie to jest określone wzorami:

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, \quad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\det A_n}{\det A}$$

WZORY CRAMERA

gdzie A to macierz główna układu, zaś A_i dla $1 \leq j \leq n$ to macierz powstała z macierzy A przez zastąpienie i-tej kolumny kolumną wyrazów wolnych.

$$\text{np.} \quad A_j = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & b_2 & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & b_n & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

i-ta kolumna

Przykład Rozwiąż układ równań, stosując wzory Cramera:

$$\begin{cases} x - y - z = 1 \\ 3x + 4y - 2z = -1 \\ 3x - 2y - 2z = 1 \end{cases}$$

trzy równania, trzy niewiadome

trzeba obl. det A

Spr, czy jest to układ Cramera:

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & -2 \end{bmatrix} = \cancel{-8} + 6 \cancel{+6} + \cancel{12} - \cancel{6} - \cancel{4} = 6$$

$$\det A_1 = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix} = -8 + 2 - \cancel{2} + \cancel{4} + \cancel{2} - \cancel{4} = -6$$

$$\det A_2 = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \cancel{2} - \cancel{6} - \cancel{3} - 3 + \cancel{6} + \cancel{2} = -2$$

$$\det A_3 = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \cancel{4} + \cancel{3} - \cancel{6} - \cancel{12} - \cancel{2} + \cancel{3} = -10$$

Rozw:
$$\begin{cases} x = \frac{-6}{6} = -1 \\ y = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3} \\ z = \frac{-10}{6} = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

Rząd macierzy

Definicja Niech A będzie macierzą o wymiarach $m \times n$. Minorem stopnia k $(k \in \mathbb{N})$ macierzy A nazywamy wyznacznik utworzony z elementów macierzy A stojących na przecięciu dowolnych k kolumn i k wierszy.

Oczywiście musi być: $k \leq \min\{m, n\}$

Przykład:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 10 \\ 2 & -2 & 6 & 15 \\ 3 & 4 & 7 & 20 \end{bmatrix}$$

minory stopnia 2 (przykładowe):

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 10 \\ -2 & 15 \end{vmatrix}, \quad \text{itd.}$$

Przykład: Oblicz wszystkie minory stopnia 2 macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -3, \quad \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1-(-2) = 3$$

Definicja

Rzędem macierzy nazywamy najwyższy stopień jej niezerowego minora.

Przyjmujemy, że rząd dowolnej macierzy zerowej jest równy zero.

Rząd macierzy A oznaczamy $rz A$.

Przykład Znaleźć rzędy macierzy

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$ $\quad rA \in \{1, 2\}$

spr, czy $rA = 2$: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$, więc sprawdzamy dalej

minory stopnia 2: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 0 = 5 \neq 0$, zatem

$rA = 2$

b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad rA \in \{1, 2, 3\}$

spr, czy $rA = 3$: $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$

czyli $rA < 3$

spr, czy $rA = 2$: $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 4 = 8 \neq 0$

czyli $rA = 2$

Własności rzędu macierzy:

1) operacje elementarne na wierszach (kolumnach) nie zmieniają rzędu macierzy

2) $rz A = rz(A^T)$

Dla układu równań $A \cdot X = B$ określamy tzw. macierz uzupełnioną U w ten sposób, że do macierzy A dopisujemy dodatkową kolumnę, złożoną z wyrazów wolnych. Czyli

$$U = A | B$$

Twierdzenie Kroneckera - Capellego:

Układ równań liniowych $AX = B$ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy rząd macierzy A jest równy rzędowi macierzy uzupełnionej, tzn.

$$rz A = rz U.$$

$\boxed{\text{nie rozwiązanie}}$ → nie nieskończenie wiele rozwiązań

↓

nie dokładnie jedno rozw.

Czyli układ równań może mieć:

- zero rozwiązań (jest sprzeczny)
- dokładnie jedno rozwiązanie
- nieskończenie wiele rozwiązań

Twierdzenie (o liczbie rozwiązań układu równań)

Niech $AX = B$ będzie układem równań o n niewiadomych. Wówczas:

1) jeżeli $r A \neq r U$, to układ jest sprzeczny

2) jeżeli $r A = r U = r$, to:

- gdy $r = n$, to układ ma dokładnie jedno rozwiązanie
- gdy $r < n$, to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $(n-r)$ parametrów

Przykład:

Dla układu równań $\begin{cases} x - y + 2z - 3t = 2 \\ 2x + y - z + 4t = 1 \\ 4x - y + 3z - 2t = 5 \end{cases}$

określić liczbę rozwiązań oraz liczbę parametrów

$$\operatorname{rz} U = \operatorname{rz} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & -2 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{l} (-2)w_1 + w_2 \\ = \\ (-4)w_1 + w_3 \end{array}$$

$$= \operatorname{rz} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & 10 & -3 \\ 0 & 3 & -5 & 10 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{l} w_2 = w_3 \\ = \end{array}$$

$$= \operatorname{rz} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & 10 & -3 \end{array}\right] = \underline{\underline{2}} = \operatorname{rz} A = \underline{\underline{r}}$$

$r = 2, \quad n = 4$

Układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $(n-r) = 4-2 = 2$ parametrów

Za chwilę wrócimy do tego przykładu i rozwiążemy podany układ równań. Wcześniej potrzebujemy jednak pewnych informacji.

Definicja Układy równań liniowych

$$AX = B \quad \text{i} \quad A'X' = B'$$

są równoważne, jeżeli zbiory ich rozwiązań są identyczne.

Wracamy do przykładu:

$$\begin{cases} x - y + 2z - 3t = 2 \\ 2x + y - z + 4t = 1 \\ 4x - y + 3z - 2t = 5 \end{cases}$$

$rA = rU = r = 2$

$n = 4$

układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od 2 parametrów

$rA = 2$, więc w macierzy A istnieje niezerowy minor stopnia 2, np:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3 \neq 0$$

$$\begin{cases} x - y = 2 - 2z + 3t \\ 2x + y = 1 + z - 4t \end{cases}$$

z, t – parametry x, y – niewiadome

układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi o niezerowym wyznaczniku – UKŁAD CRAMERA

$W = 3$

$$W_x = \begin{vmatrix} 2 - 2z + 3t & -1 \\ 1 + z - 4t & 1 \end{vmatrix} = 2 - 2z + 3t + 1 + z - 4t = 3 - z - t$$

$$W_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 - 2z + 3t \\ 2 & 1 + z - 4t \end{vmatrix} = 1 + z - 4t - 2(2 - 2z + 3t) = -3 + 5z - 10t$$

rozw. układu Cramera:

$$\begin{cases} x = \dfrac{3 - z - t}{3} \\ y = \dfrac{-3 + 5z - 10t}{3} \end{cases}$$

rozw. naszego układu:

$$\begin{cases} x = \dfrac{3 - z - t}{3} \\ y = \dfrac{-3 + 5z - 10t}{3} \\ z \in \mathbb{R} \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

np:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

Co możemy zrobić z macierzą uzupełnioną układu, by otrzymać macierz układu równoważnego:

- możemy wykonywać operacje elementarne na wierszach
- możemy skreślić wiersz złożony z samych zer
- możemy skreślić jeden z wierszy proporcjonalnych
- możemy zamienić miejscami dwie kolumny przy jednoczesnej zamianie niewiadomych:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1l} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & a_{2j} & & a_{2l} & & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mj} & & a_{ml} & & a_{mn} \end{bmatrix} \approx \quad k_j \leftrightarrow k_l$$

$x_1 \dots x_j \dots x_l \dots x_n$

NIEWIADOME

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1l} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & a_{2l} & & a_{2j} & & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{ml} & & a_{mj} & & a_{mn} \end{bmatrix} = A''$$

$x_1 \dots x_l \dots x_j \dots x_n$

NIEWIADOME

Nasz przykład:

$$\begin{array}{cccccc} x & y & z & t & & \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 4 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & -2 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{c} (-2)w_1+w_2 \\ \approx \\ (-4)w_1+w_2 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & 10 & -3 \\ 0 & 3 & -5 & 10 & -3 \end{array}\right] \overset{w_2 = w_3}{\approx}$$

$$\approx \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & 10 & -3 \end{array}\right] \overset{(\frac{1}{3})w_2+w_1}{\approx} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 10 & -3 \end{array}\right] \overset{\frac{1}{3}\cdot w_2}{\approx}$$

$$\approx \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} & \frac{10}{3} & -1 \end{array}\right]$$

niewiadome (dwie) ich ilość oznaczamy przez r

parametry (dwa) jest ich $n-r$

$$\begin{cases} x + \frac{1}{3}z + \frac{1}{3}t = 1 \\ y - \frac{5}{3}z + \frac{10}{3}t = -1 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} x = 1 - \frac{1}{3}z - \frac{1}{3}t \\ y = -1 + \frac{5}{3}z - \frac{10}{3}t \\ z \in R \\ t \in R \end{cases}}$$

rozwiązanie układu równań

METODA ELIMINACJI GAUSSA-JORDANA

$AX = B, \quad A^{m}_{n}$

1.

$$U = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{array} \end{array}$$

2. macierz U sprowadzamy do postaci

$$U' = \left[\begin{array}{cccc|ccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & s_{1\,r+1} & \dots & s_{1n} & z_1 \\ 0 & 1 & & 0 & s_{2\,r+1} & & s_{2n} & z_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & s_{r\,r+1} & & s_{rn} & z_r \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & z_{r+1} \end{array}\right]$$

$$\underbrace{x_1' \; x_2' \; \dots \; x_r'}_{\text{niewiadome}} \quad \underbrace{x_{r+1}' \; \dots \; x_n'}_{\text{parametry}}$$

przy czym ostatni wiersz może nie pojawić się wcale albo wystąpi ze współczynnikiem $z_{r+1} \neq 0$. Wówczas

a) jeżeli $z_{r+1} \neq 0$, to układ jest sprzeczny

b) jeżeli ostatni wiersz nie pojawi się i $n = r$, to układ ma dokładnie jedno rozwiązanie postaci

- $x_1 = z_1, \; x_2 = z_2, \; \dots, \; x_n = z_n$ (gdy nie było zamiany kolumn)

lub

- $x_1' = z_1, \; x_2' = z_2, \; \dots, \; x_n' = z_n$ (gdy była).

c) jeżeli ostatni wiersz nie pojawi się i $n > r$, to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań, przy czym r spośród niewiadomych $x_1', x_2', \ldots, x_r'$ zależy od pozostałych $n-r$ niewiadomych (oznaczonych teraz $x'_{r+1}, x'_{r+2}, \ldots, x_n'$ w następujący sposób:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_r' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s_{1\,r+1} & s_{1\,r+2} & \cdots & s_{1n} \\ s_{2\,r+1} & s_{2\,r+2} & \cdots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{r\,r+1} & s_{r\,r+2} & \cdots & s_{rn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_{r+1} \\ x'_{r+2} \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}$$

Przykład (ten sam) rozwiążemy dwoma metodami:

$$\begin{cases} x + 6y - z = 0 \\ -x - 4y + 5z = 6 \\ 3x + 17y = 2 \\ 2x + 13y + 5z = 8 \end{cases}$$

$$rU = r\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -1 & 0 \\ -1 & -4 & 5 & 6 \\ 3 & 17 & 0 & 2 \\ 2 & 13 & 5 & 8 \end{array}\right] \begin{array}{l} w_1 + w_2 \\ (-3)w_1 + w_3 \\ = \\ (-2)w_1 + w_4 \end{array} r\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \end{array}\right] =$$

zerowanie

$$\frac{1}{2}w_2 = r\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \end{array}\right] = r\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \end{array}\right] \begin{array}{l} w_2 + w_3 \\ = \\ -w_2 + w_4 \end{array}$$

$$= r\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{5} & \cancel{5} \end{array}\right] \frac{1}{5}w_3 = r\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] = \underline{3} =$$

$$= rA = r$$

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -1 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 17 & 0 \end{vmatrix} = 90 + 17 - 12 - 17\cdot 5 = 10$$

$$W_x = \begin{vmatrix} 0 & 6 & -1 \\ 6 & -4 & 5 \\ 2 & 17 & 0 \end{vmatrix} = 60 - 6\cdot 17 - 8 = -50$$

$$W_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 6 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 + 18 - 10 = 10$$

$$W_z = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ -1 & -4 & 6 \\ 3 & 17 & 2 \end{vmatrix} = -8 + 108 - 17\cdot 6 + 12 = 10$$

Rozw:

$$\begin{cases} x = \frac{-50}{10} = -5 \\ y = \frac{10}{10} = 1 \\ z = \frac{10}{10} = 1 \end{cases}$$

Przykład :

$$\begin{cases} x + 6y - z = 0 \\ -x - 4y + 5z = 6 \\ 3x + 17y = 2 \\ 2x + 13y + 5z = 8 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -1 & 0 \\ -1 & -4 & 5 & 6 \\ 3 & 17 & 0 & 2 \\ 2 & 13 & 5 & 8 \end{array}\right] \begin{array}{l} w_1 + w_2 \\ (-3)w_1 + w_3 \\ \approx \\ (-2)w_1 + w_4 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \end{array}\right] \begin{array}{l} \frac{1}{2}w_2 \\ \approx \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \end{array}\right] \begin{array}{l} (-6)w_2 + w_1 \\ \approx \\ w_2 + w_3 \\ -w_2 + w_4 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -13 & -18 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{l} w_3 = w_4 \\ \approx \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -13 & -18 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{l} \frac{1}{5} \cdot w_3 \\ \approx \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -13 & -18 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} (-2)w_3 + w_2 \\ \approx \\ 13w_3 + w_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

układ ma dokładnie jedno rozwiązanie

$$\begin{cases} x = -5 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$