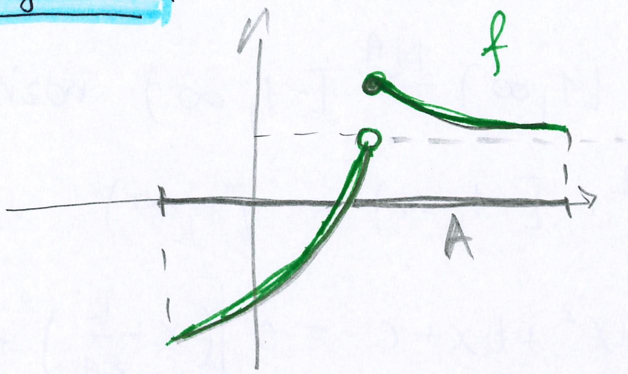
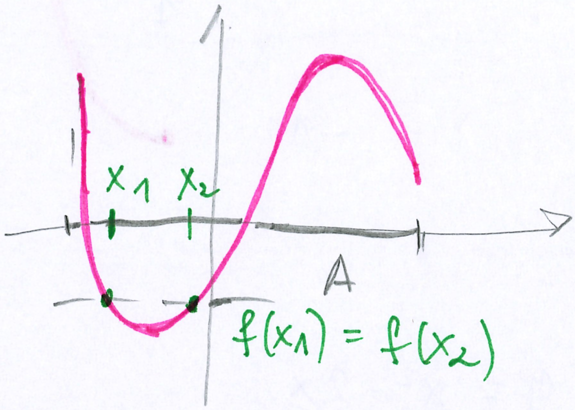
**Definicja** Funkcja $f$ jest różnowartościowa na zbiorze $A \subset D_f$, gdy:

$$\forall_{x_1, x_2 \in A} \left[ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \right]$$

**Przykład**:




f jest różnowartościowa




f NIE jest różnowartościowa

Warunek równoważny na różnowartościowość funkcji

$$\forall_{x_1, x_2 \in A} \left[ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \right]$$

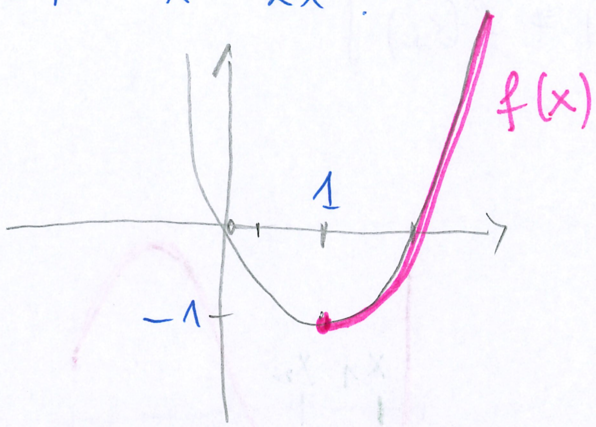
**Definicja** Niech $f: X \xrightarrow{NA} Y$ będzie różnowartościowa na dziedzinie $X$. Funkcją odwrotną do $f$ nazywamy funkcję $f^{-1}: Y \to X$ zadaną warunkiem

$$f^{-1}(y) = x \iff y = f(x) \text{ dla } x \in X, \; y \in Y.$$

## Przykład

Znaleźć funkcję odwrotną do funkcji $f: [1,\infty)$,

$f(x) = x^2 - 2x$




$y = x^2 - 2x$

$y = x(x-2)$

$0 \quad 2$

$f: [1,\infty) \xrightarrow{NA} [-1,\infty)$ różn.

$f^{-1}: [-1,\infty) \to [1,\infty)$

$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}\right]$

$= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}$

$\Delta = 4$

$y = x^2 - 2x$

$y = \left(x + \frac{-2}{2}\right)^2 + \frac{-4}{4}$

$y = (x-1)^2 - 1$

$x = (y-1)^2 - 1$

$x + 1 = (y-1)^2$

$y - 1 = \pm\sqrt{x+1}$

$y = \pm\sqrt{x+1} + 1$

$y_1 = \sqrt{x+1} + 1$, ~~$y_2 = -\sqrt{x+1} + 1$~~ nie pasuje do zbioru wartości

$f^{-1}(x) = \sqrt{x+1} + 1$

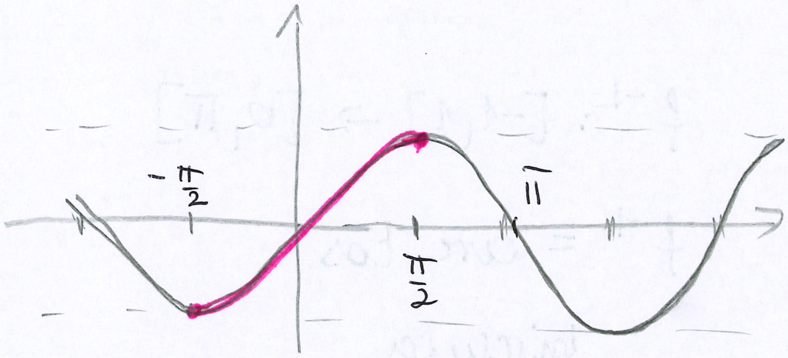
Odp.: $f^{-1}: [-1,\infty) \to [1,\infty)$

$f^{-1}(x) = \sqrt{x+1} + 1$

# Funkcje cyklometryczne (funkcje odwrotne do funkcji trygonometrycznych)

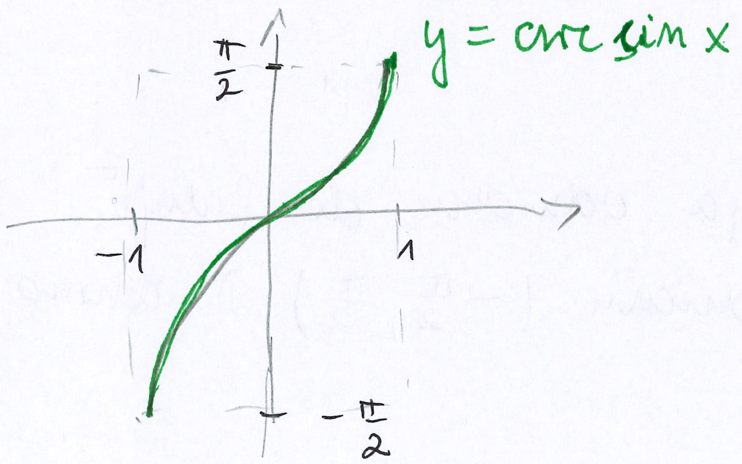
## arkus sinus:

Funkcja arc sin to funkcja odwrotna do funkcji sinus obciętej do przedziału $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Dziedziną funkcji arc sin jest przedział $[-1,1]$.




$f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$

bijekcja




$f^{-1}: [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$f^{-1} = \text{arc sin}$

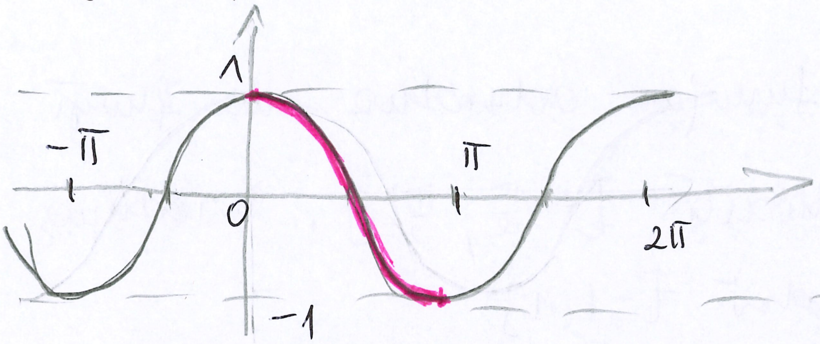
bijekcja

np $\quad \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, bo $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

$\quad \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, bo $\sin \frac{\pi}{2} = 1$

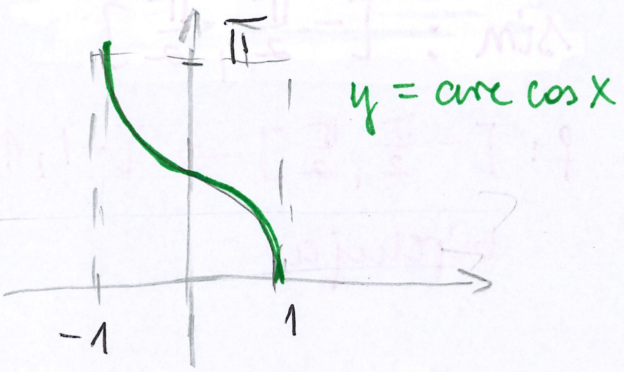
## arkus kosinus:

Funkcja arc cos to funkcja odwrotna do funkcji cosinus obciętej do przedziału $[0, \pi]$. Dziedziną funkcji arc cos jest przedział $[-1,1]$.




$f: [0,\pi] \to [-1,1]$

bijekcja



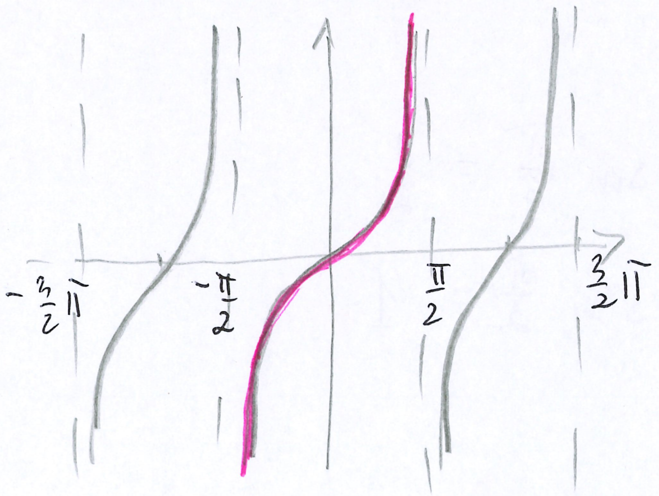

$f^{-1}: [-1,1] \to [0,\pi]$

$f^{-1} = \arccos$

bijekcja

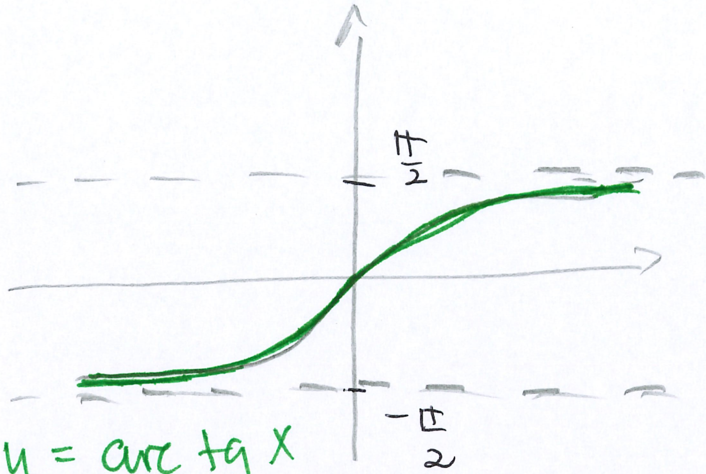
## arkus tangens:

Funkcja arc tg to funkcja odwrotna do funkcji tangens obciętej do przedziału $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Dziedziną funkcji arc tg jest $\mathbb{R}$.




$f: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$

bijekcja




$y = \text{arc tg}\, x$

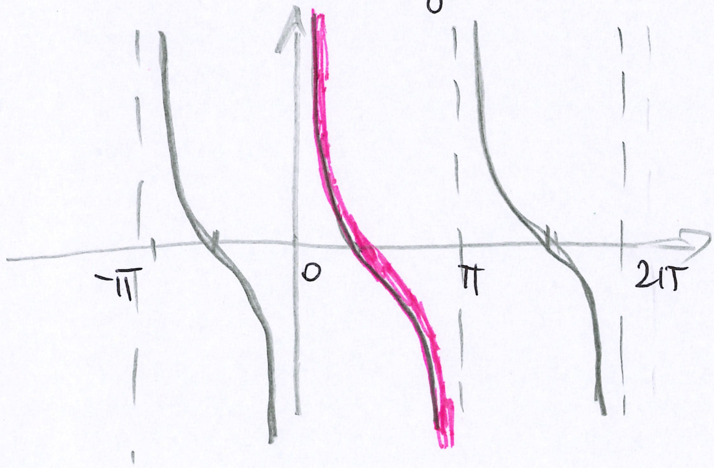
$f^{-1}: \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$f^{-1} = \text{arc tg}$

bijekcja

## arcus kotangens:

Funkcja arc ctg to funkcja odwrotna do funkcji cotangens obciętej do przedziału $(0, \pi)$. Dziedziną funkcji arc ctg jest $\mathbb{R}$.



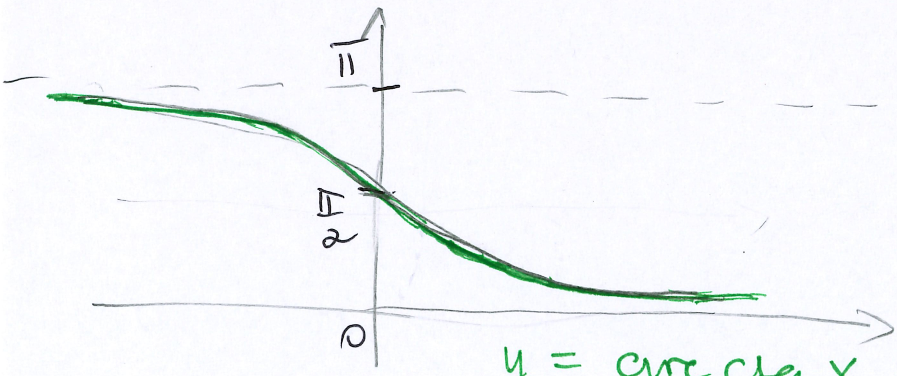

$f: (0, \pi) \to \mathbb{R}$

bijekcja

$f^{-1}: \mathbb{R} \to (0, \pi)$

$f^{-1} = \text{arc ctg}$

bijekcja



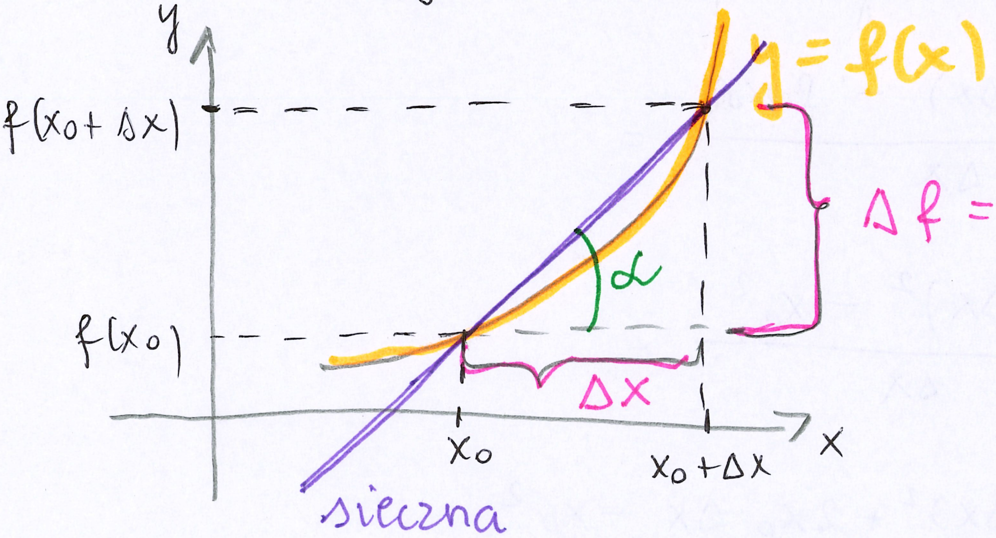

$y = \text{arc ctg}\, x$

# Pochodna funkcji

**Definicja** Niech $x_0 \in \mathbb{R}$. Niech $f$ będzie określona przynajmniej na otoczeniu $O(x_0, r)$. Iloraz różnicowy funkcji $f$ w punkcie $x_0$ dla przyrostu $\Delta x$ to wzór:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\overbrace{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}^{\Delta f}}{\Delta x},$$

gdzie zakładamy, że $0 < |\Delta x| < r$.




$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

tangens kąta nachylenia siecznej przechodzącej przez punkty: $(x_0, f(x_0))$, $(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$ do dodatniej półosi $Ox$

**Definicja** Niech $x_0 \in \mathbb{R}$. Niech $f$ będzie określona przynajmniej na otoczeniu $O(x_0)$. Pochodną (właściwą) funkcji $f$ w punkcie $x_0$ nazywamy granicę

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

o ile granica ta istnieje i jest właściwa.

**Przykład** Obliczyć z definicji pochodną funkcji $f(x) = x^2$ w ustalonym punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x_0^2} + (\Delta x)^2 + 2x_0 \cdot \Delta x - \cancel{x_0^2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}(\Delta x + 2x_0)}{\cancel{\Delta x}} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (\underbrace{\Delta x}_{\to 0} + 2x_0) = 2x_0$$

zatem $f'(x) = 2x$.

**Przykład** Sprawdź, czy funkcja $f(x) = |x-3|$ ma pochodną w punkcie $x_0 = 3$.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(3+\Delta x) - f(3)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|3+\Delta x - 3| - 0}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x| - 0}{\Delta x} = ?$$

$$|\Delta x| = \begin{cases} \Delta x, & \Delta x \geq 0 \\ -\Delta x, & \Delta x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} = 1$$

$$\lim_{x \to 0-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$$

$\Rightarrow$ nie istnieje $\lim_{x \to 0} \frac{f(3+\Delta x) - f(3)}{\Delta x}$

zatem $f$ nie ma pochodnej w punkcie $x_0 = 3$.

# Pochodne ważniejszych funkcji

$c' = 0$, $c \in \mathbb{R}$

$(x^n)' = nx^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$

$(x^p)' = px^{p-1}$, $p \in \mathbb{N}^- = \{-n : n \in \mathbb{N}\}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $x$ – zależy od $\alpha$

$(\sin x)' = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$

$(\cos x)' = -\sin x$, $x \in \mathbb{R}$

$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$(\operatorname{ctg} x)' = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$, $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1,1)$

$(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1,1)$

$(\operatorname{arc\,tg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

$(\operatorname{arc\,ctg} x)' = \dfrac{-1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, $0 < a$, $x \in \mathbb{R}$

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$, $0 < a \neq 1$, $x > 0$

## Szczególne przypadki:

$$x' = 1$$

$$(ax)' = a$$

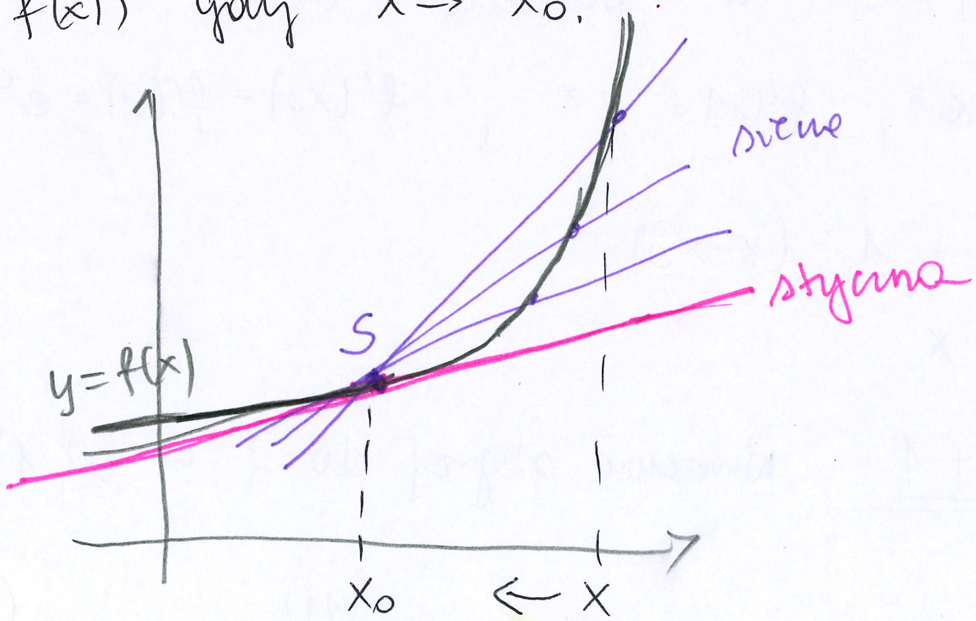
$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(e^x)' = e^x$$

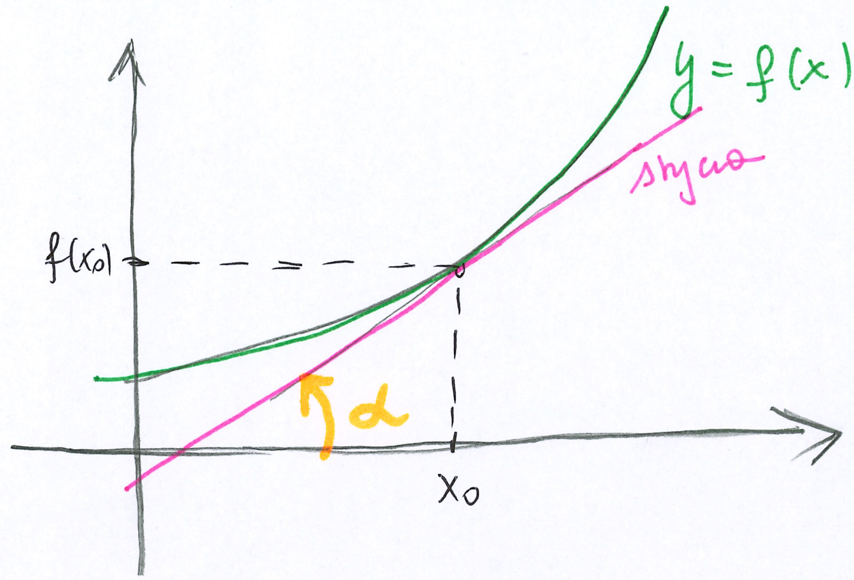
$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$$

**Definicja** Niech $x_0 \in \mathbb{R}$. Niech $f$ będzie funkcją ciągłą określoną przynajmniej na otoczeniu $O(x_0)$. Prosta jest styczna do wykresu funkcji $f$ w punkcie $(x_0, f(x_0))$, jeśli jest granicznym położeniem siecznych przechodzących przez punkty $(x_0, f(x_0))$, $(x, f(x))$ gdy $x \to x_0$.



## Interpretacja geometryczna pochodnej funkcji w punkcie




$\alpha$ – kąt między styczną do wykresu $f$ w punkcie $(x_0, f(x_0))$ i dodatnią półosią $OX$

Mamy wtedy: $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$

Zatem równanie stycznej do wykresu $f$ w punkcie $(x_0, f(x_0))$ ma postać:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

**Przykład** Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = e^x$ w punkcie $(0,1)$.

Mamy: $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$, $f'(x_0) = f'(0) = e^0 = 1$

$$y = e^0 + 1 \cdot (x - 0)$$

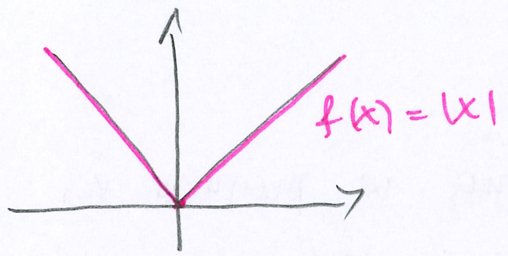
$$y = 1 + x$$

$\underline{y = x + 1}$ równanie stycznej do $f$ w $(0,1)$

## Twierdzenie

Jeśli funkcja ma pochodną w punkcie, to jest w tym punkcie ciągła.

UWAGA: Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe, tzn. funkcja ciągła w punkcie może w tym punkcie nie mieć pochodnej. Przykład takiej funkcji: $f(x) = |x|$ w punkcie $x_0 = 0$.




**f(x) jest ciągła w $x_0 = 0$:**

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} |x| = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} |x| = \lim_{x\to 0^-} (-x) = 0$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

oraz $f(x_0) = f(0) = |0| = 0$, zatem f jest ciągła w $x = 0$

**f(x) nie ma pochodnej w $x = 0$:**

$$\lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{|0+\Delta x| - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} 1 = 1$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{|0+\Delta x| - 0}{\Delta x} = \lim_{x\to 0^-} (-1) = -1$$

zatem $\lim_{x\to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = f'(0)$ nie istnieje.

# Pochodne jednostronne funkcji

**Definicja** Niech $x_0 \in \mathbb{R}$. Niech $f$ będzie określona przynajmniej na otoczeniu $O(x_0^-)$. Pochodna lewostronna (właściwa) funkcji $f$ w punkcie $x_0$ to liczba

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

o ile granica ta istnieje i jest właściwa.

Analogicznie definiujemy pochodną prawostronną.

**Twierdzenie** Funkcja $f$ ma pochodną w punkcie $x_0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$. Jeśli ich wspólną wartość oznaczymy przez $a$, to mamy: $f'(x_0) = a$.

**Definicja** Funkcja ma pochodną na zbiorze wtedy i tylko wtedy, gdy ma pochodną w każdym punkcie tego zbioru. Funkcję określoną w ten sposób ($x \mapsto f'(x)$ dla $x$ ze zbioru) nazywamy pochodną funkcji na zbiorze i oznaczamy przez $f'$.

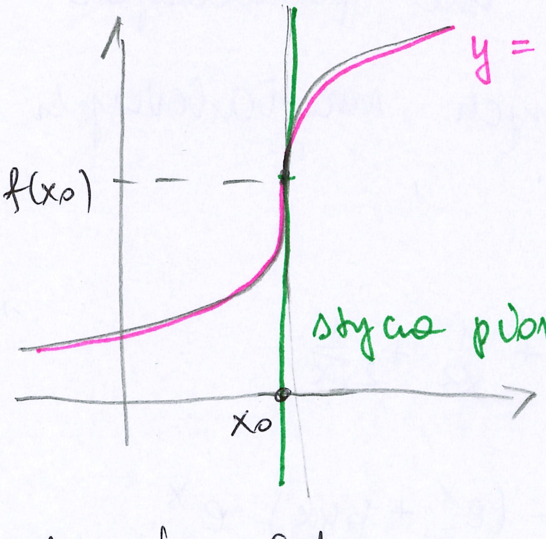
Dokładniej:

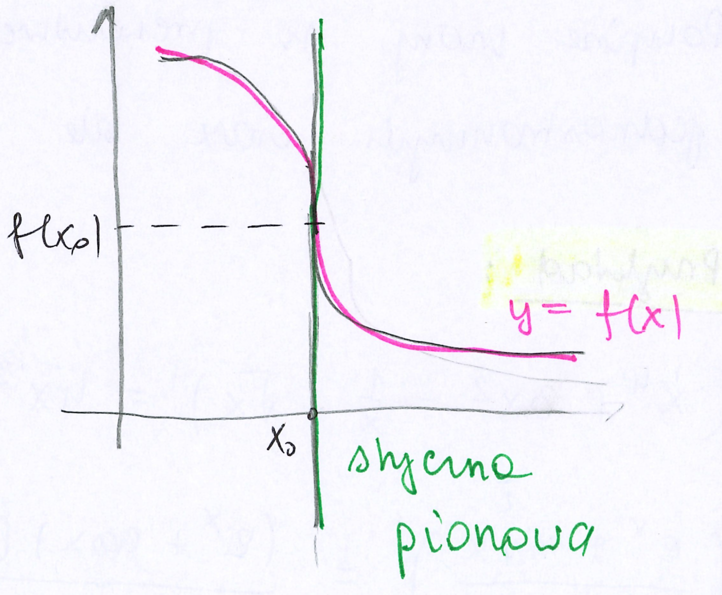
pochodna na $[a,b]$: pochodna w każdym punkcie przedziału $(a,b)$ oraz pochodna prawostronna w punkcie $a$ i pochodna lewostronna w punkcie $b$.

**Definicja** Niech $f$ będzie ciągła w $x_0$. Funkcja $f$ ma w punkcie $x_0$ pochodną niewłaściwą wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \infty \quad \text{lub} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = -\infty.$$

Piszemy wtedy: $f'(x_0)=\infty$ lub $f'(x_0)=-\infty$.




sytuacja, gdy $f'(x_0)=\infty$

sytuacja, gdy $f'(x_0)=-\infty$

Analogicznie definiujemy pochodne niewłaściwe jednostronne.

# Twierdzenia o pochodnych

**Twierdzenie**: Jeżeli funkcje $f$ i $g$ mają pochodne właściwe w punkcie $x_0$, to:

1. $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
2. $(f-g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$
3. $(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$, gdzie $c \in \mathbb{R}$ (stała)
4. $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
5. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) g(x_0) - f(x_0) g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$, o ile $g(x_0) \neq 0$.

Powyższe wzory są prawdziwe także dla pochodnych jednostronnych oraz dla pochodnych niewłaściwych

**Przykład**:

- $\left(x^4 + 3x^2 - \frac{1}{x} + \sqrt{x}\right)' = 4x^3 + 6x + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

- $\left(\frac{e^x + \sin x}{e^x + 4}\right)' = \frac{(e^x + \cos x)(e^x + 4) - (e^x + \sin x) \cdot e^x}{(e^x + 4)^2} =$

$$= \frac{\cancel{e^{2x}} + 4e^x + e^x \cos x + 4\cos x - \cancel{e^{2x}} - e^x \sin x}{(e^x + 4)^2}$$

$$= \frac{e^x(4 + \cos x - \sin x) + 4\cos x}{(e^x + 4)^2}$$

**Twierdzenie** (o pochodnej funkcji złożonej)

Jeżeli: 1) $f$ ma pochodną właściwą w punkcie $x_0$,

2) $g$ ma pochodną właściwą w punkcie $f(x_0)$,

to $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.

**Przykład**

- $(\sin^2 x)' = \left[(\sin x)^2\right]' = 2\sin x \cdot (\sin x)' = 2\sin x \cos x$

- $\left(e^{\cos\sqrt{x}}\right)' = e^{\cos\sqrt{x}} \cdot (\cos\sqrt{x})' = e^{\cos\sqrt{x}} \cdot (-\sin\sqrt{x}) \cdot \sqrt{x}\,' =$

$= e^{\cos\sqrt{x}} \cdot (-\sin\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$

- $\left(\frac{1}{\cos(\sin x)}\right)' = \frac{-1}{\cos^2(\sin x)} \cdot (\cos(\sin x))' =$

$= \frac{-1}{\cos^2(\sin x)} \cdot (-\sin(\sin x)) \cdot (\sin x)' =$

$= \frac{\sin(\sin x)}{\cos^2(\sin x)} \cdot \cos x$

**Twierdzenie** (o pochodnej funkcji odwrotnej)

Jeżeli funkcja $f$: 1) jest ciągła na otoczeniu $O(x_0)$

2) maleje albo rośnie na $O(x_0)$

3) ma pochodną właściwą $f'(x_0) \neq 0$

to:
$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}, \quad \text{gdzie } y_0 = f(x_0).$$

Wzór ten pozostaje prawdziwy dla pochodnych jednostronnych oraz niewłaściwych.

**Przykład**:

$$\left(\ln\left(\ln\frac{x}{3} + \operatorname{tg}x\right)\right)' = \frac{1}{\ln\frac{x}{3} + \operatorname{tg}x} \cdot \left(\ln\frac{x}{3} + \operatorname{tg}x\right)' =$$

$$= \frac{1}{\ln\frac{x}{3} + \operatorname{tg}x} \cdot \left(\frac{1}{\frac{x}{3}} \cdot \left(\frac{x}{3}\right)' + \frac{1}{\cos^2 x}\right) =$$

$$= \frac{1}{\ln\frac{x}{3} + \operatorname{tg}x}\left(\frac{3}{x} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{\cos^2 x}\right) = \frac{1}{\ln\frac{x}{3} + \operatorname{tg}x}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right)$$

## Obliczanie pochodnych funkcji złożonych postaci

$$f^g \quad \text{lub} \quad \log_f g$$

Stosujemy wzory:

$$\boxed{f^g = e^{g \ln f}} \qquad \boxed{\log_f g = \frac{\ln g}{\ln f}}$$

**Przykład:**

- $\left(x^{\sin x}\right)' = \left(e^{\sin x \cdot \ln x}\right)' = e^{\sin x \cdot \ln x} \cdot \left(\sin x \cdot \ln x\right)' =$

$$= e^{\sin x \cdot \ln x} \cdot \left(\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}\right) =$$

$$= e^{\sin x \cdot \ln x} \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right.$$

- $\left(x^{x^2}\right)' = \left(x^{(x^2)}\right)' = \left(e^{x^2 \ln x}\right)' =$

$$= e^{x^2 \ln x} \cdot \left(x^2 \cdot \ln x\right)' =$$

$$= e^{x^2 \ln x} \left(2x \cdot \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x}\right) =$$

$$= e^{x^2 \ln x} \left(2x \cdot \ln x + x\right)$$

- $\left(\log_x (3x)\right)' = \left(\frac{\ln(3x)}{\ln x}\right)' = \frac{\frac{1}{\cancel{3}x} \cdot \cancel{3} \cdot \ln x - \ln(3x) \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x} =$

$$= \frac{\frac{\ln x}{x} - \frac{\ln 3 + \ln x}{x}}{\ln^2 x} = \frac{\frac{\ln x - \ln 3 - \ln x}{x}}{\ln^2 x} =$$

$$= \frac{-\ln 3}{x \cdot \ln^2 x}$$