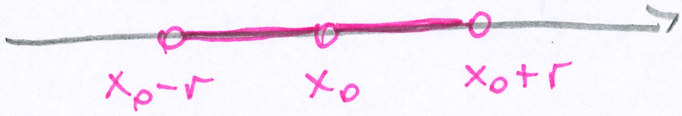
Informatyka, WYKŁAD 3

Granica funkcji, ciągłość funkcji. Asymptoty funkcji.

Definicja

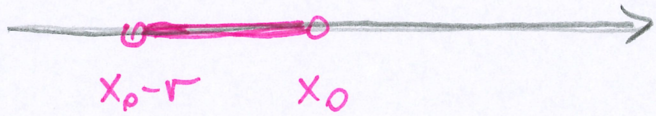
A) Sąsiedztwo o promieniu $r>0$ punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ to zbiór

$$S(x_0, r) = (x_0 - r, x_0 + r) \setminus \{x_0\}$$



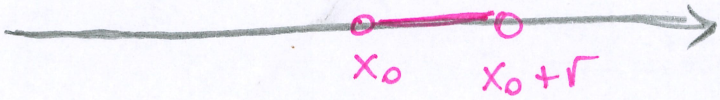
B) Sąsiedztwo lewostronne o promieniu $r>0$ punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ to zbiór

$$S(x_0^-, r) = (x_0 - r, x_0)$$



C) Sąsiedztwo prawostronne o promieniu $r>0$ punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ to zbiór

$$S(x_0^+, r) = (x_0, x_0 + r)$$



Często piszemy: $S(x_0)$

$S(x_0^-)$

$S(x_0^+)$

d) Sąsiedztwo $-\infty$ to zbiór $S(-\infty) = (-\infty, b)$, $b \in \mathbb{R}$

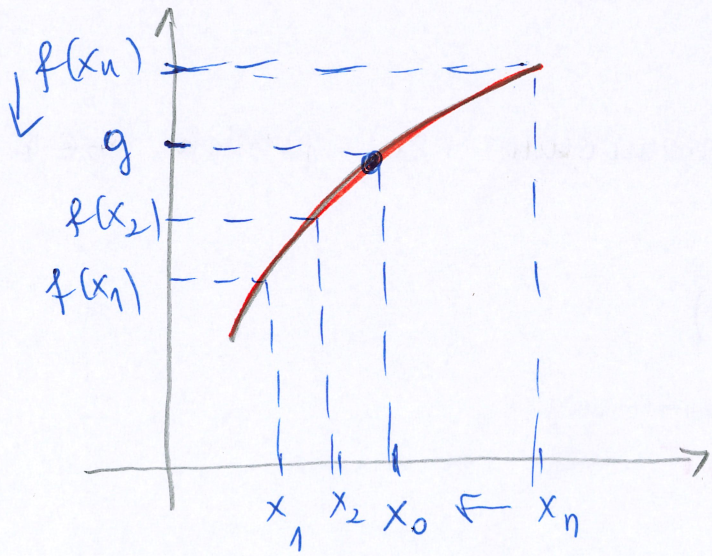
e) Sąsiedztwo ∞ to zbiór $S(\infty) = (a, \infty)$, $a \in \mathbb{R}$.

Definicja (Heinego granicy właściwej funkcji w punkcie)

Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej na sąsiedztwie $S(x_0)$. Liczba g jest granicą właściwą funkcji f w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\forall_{(x_n) \subset S(x_0)} \left[\lim x_n = x_0 \Rightarrow \lim f(x_n) = g \right]$$

Piszemy wtedy: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g$.



Czyli: gdy znajdziemy dwa ciągi (x_n'), (x_n'') o wyrazach różnych od x_0 (czyli należące do $S(x_0)$) zbieżne do x_0, ale takie, że

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n') = g', \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n'') = g''$$

$$g' \neq g'',$$

to granica $\lim_{x\to x_0} f(x)$ nie istnieje.

Definicja (Cauchy'ego granicy właściwej funkcji w punkcie)

Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej na sąsiedztwie $S(x_0)$. Liczba g jest granicą właściwą funkcji f w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0} \; \exists_{\delta>0} \; \forall_{x\in S(x_0)} \left[|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-g|<\varepsilon \right].$$

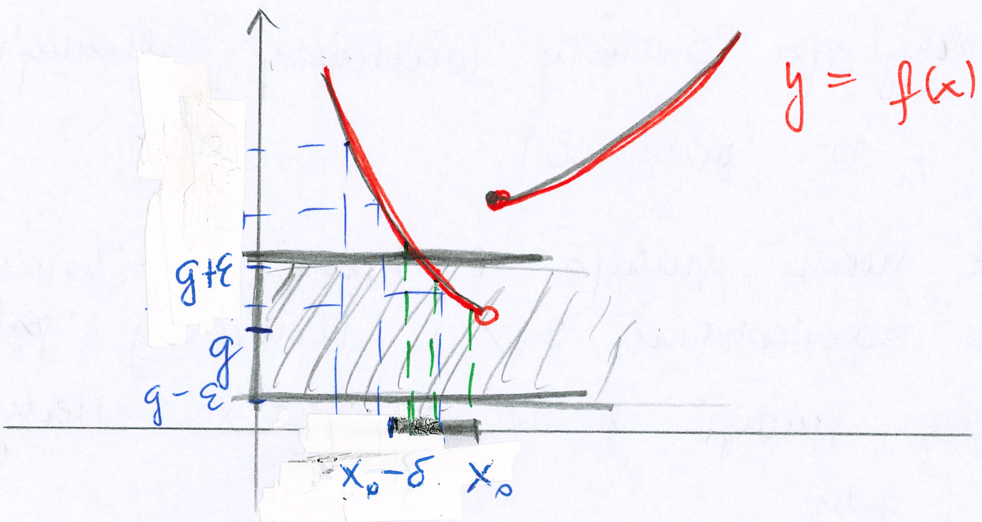
Piszemy wtedy $\lim_{x\to x_0} f(x) = g$.

Definicje Heinego i Cauchy'ego są równoważne.

Definicja (Cauchy'ego granicy lewostronnej właściwej funkcji w punkcie)

Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ i niech f będzie określona przynajmniej na sąsiedztwie $S(x_0^-)$. Liczba g jest granicą właściwą lewostronną funkcji f w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\forall_{\varepsilon>0} \; \exists_{\delta>0} \; \forall_{x \in S(x_0^-)} \left[0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon \right]$$



Piszemy wtedy: $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = g$

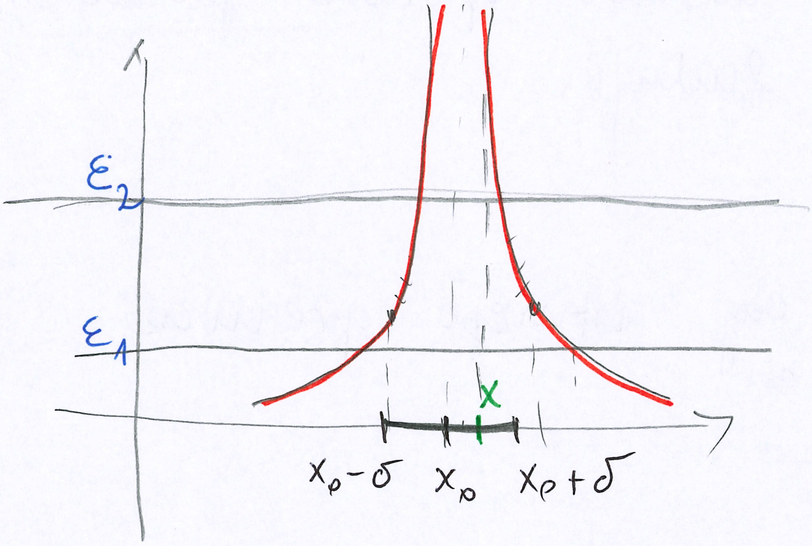
Analogicznie definiujemy granicę prawostronną właściwą w punkcie x_0, piszemy wtedy

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = g.$$

Definicja (Cauchy'ego granicy niewłaściwej funkcji w punkcie)

Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej na sąsiedztwie $S(x_0)$. Funkcja f ma granicę niewłaściwą ∞ w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0} \ \exists_{\delta>0} \ \forall_{x\in S(x_0)} \left[|x-x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon \right]$$



Analogicznie definiujemy granicę niewłaściwą $-\infty$ w punkcie.

Granice niewłaściwe f w punkcie zapisujemy:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty,$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty.$$

Twierdzenie (warunek konieczny i wystarczający istnienia granicy)

Funkcja f ma w punkcie x_0 granicę właściwą (niewłaściwą) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x).$$

Wtedy ta wspólna wartość granic jednostronnych jest granicą funkcji.

Przykład

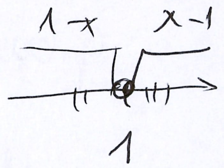
Zbadać, czy istnieje granica

$$\lim_{x\to 1} \frac{|x-1|^3}{x-1}$$

Obliczamy granice jednostronne w $x_0 = 1$:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{|x-1|^3}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{[-(x-1)]^3}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-(x-1)^3}{\cancel{x-1}} =$$

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & x-1 \geq 0 \\ 1-x, & x-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ 1-x, & x < 1 \end{cases}$$



$$= \lim_{x\to 1^-} -(x-1)^2 = \underline{\underline{0}}$$

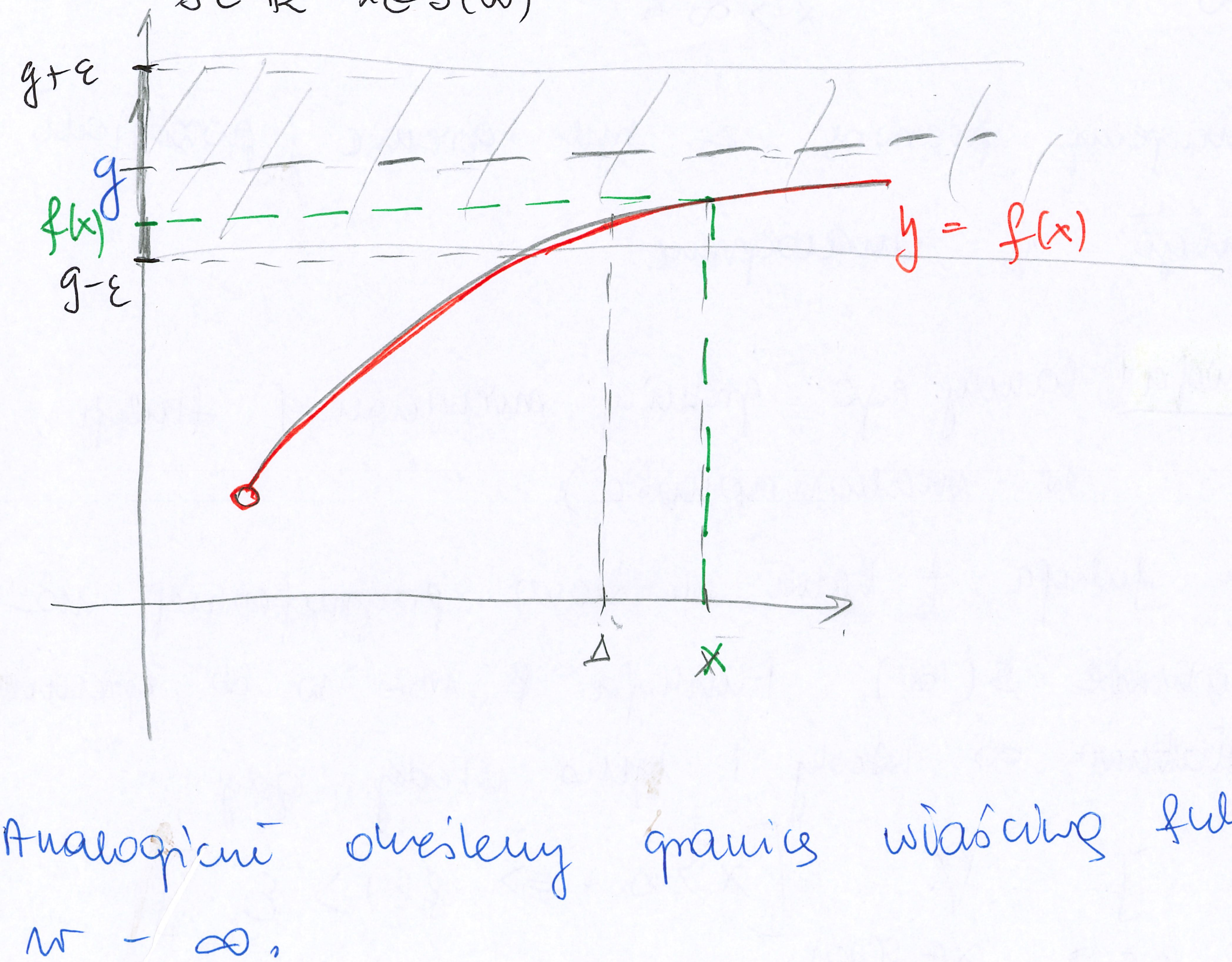
$$\lim_{x\to 1^+} \frac{|x-1|^3}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)^3}{\cancel{x-1}} = \lim_{x\to 1^+} (x-1)^2 = \underline{\underline{0}}$$

ZATEM $\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)}{x-1}$ istnieje i jest równa 0.

Definicja (Cauchy'ego granicy właściwej funkcji w nieskończoności)

Niech funkcja f będzie określona przynajmniej na sąsiedztwie $S(\infty)$. Liczba g jest granicą właściwą funkcji f w ∞ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0} \ \exists_{\Delta\in\mathbb{R}} \ \forall_{x\in S(\infty)} \left[x > \Delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon \right]$$



Analogicznie określamy granicę właściwą funkcji w $-\infty$.

Pozostały jeszcze do zdefiniowania granice niewłaściwe funkcji w nieskończoności. Są cztery typy takich granic:

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Zdefiniujemy pierwszą z tych granic, pozostałe definicje są analogiczne.

Definicja (Cauchy'ego granicy niewłaściwej funkcji w nieskończoności)

Niech funkcja f będzie określona przynajmniej na sąsiedztwie $S(\infty)$. Funkcja f ma w ∞ granicę niewłaściwą ∞ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon > 0} \; \exists_{\delta \in \mathbb{R}} \; \forall_{x \in S(\infty)} \left[x > \delta \Rightarrow f(x) > \varepsilon \right]$$

Twierdzenia o granicach własności funkcji

Twierdzenie (o arytmetyce granic funkcji)

Jeżeli funkcje f i g mają granice właściwe w punkcie x_0, to:

1) $\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x)$

2) $\lim_{x \to x_0} \left(c \cdot f(x)\right) = c \cdot \lim_{x \to x_0} f(x)$, $c \in \mathbb{R}$

3) $\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$

4) $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}$, o ile mianownik $\neq 0$

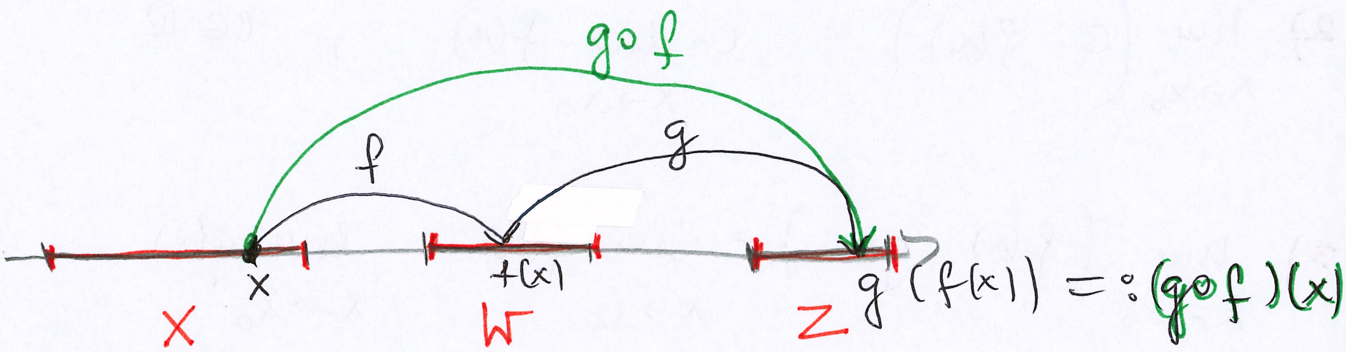
5) $\lim_{x \to x_0} \left[f(x)^{g(x)} \right] = \left[\lim_{x \to x_0} f(x) \right]^{\lim_{x \to x_0} g(x)}$

Powyższe własności są też prawdziwe dla granic jednostronnych oraz dla granic w $-\infty$ lub ∞.

Przypomnienie ze szkoły – złożenie funkcji

Mamy $f: X \to Y$, $g: W \to Z$, przy czym zakładamy, że $Y \subset W$. Funkcję złożoną z funkcji f i g nazywamy funkcję $g\circ f : X \to Z$ daną wzorem:

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) \quad \text{dle } x\in X.$$



Twierdzenie

Jeżeli:

1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$

2) $f(x) \neq y_0$ dle $x \in S(x_0)$

3) $\lim\limits_{y\to y_0} g(y) = z_0$

to $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x)) = z_0$.

Twierdzenie o trzech funkcjach

Jeśli f, g, h spełniają warunki:

1) $\forall_{x \in S(x_0)} \quad f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = p$

to $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = p$.

Twierdzenie pozostaje prawdziwe dla granic właściwych jednostronnych oraz dla granic właściwych w nieskończoności.

Przykład

Oblicz granicę $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x \cos x$.

Mamy:

$$\underbrace{-e^x}_{\to 0 \text{ gdy } x \to -\infty} \leq e^x \cos x \leq \underbrace{e^x}_{\to 0 \text{ gdy } x \to -\infty}$$

$e^x \cos x \to 0$ gdy $x \to -\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} e^x \cos x = 0.$$

Twierdzenia o granicach niewłaściwych funkcji

Twierdzenie o dwóch funkcjach

Jeśli f, g spełniają warunki

1) $f(x) \leq g(x)$ dla $x \in S(x_0)$

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$

to $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$

Twierdzenie jest prawdziwe dla granic jednostronnych oraz dla granic w nieskończoności. Prawdziwe są też analogiczne twierdzenia granicy niewłaściwej $-\infty$.

Twierdzenie

$p + \infty = \infty$ dla $p \in (-\infty, \infty]$

$\frac{p}{\infty} = 0$ dla $p \in (-\infty, \infty)$

$p^{\infty} = 0$ dla $p \in [0^+, 1)$, $p^{\infty} = \infty$ dla $p \in [1, \infty]$

$\infty^q = 0$ dla $q \in [-\infty, 0)$, $\infty^q = \infty$ dla $q \in (0, \infty]$

$p \cdot \infty = \infty$ dla $p \in (0, \infty]$

$\frac{p}{0^+} = \infty$ dla $p \in (0, \infty)$

Granice pewnych wyrażeń nieoznaczonych

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad , \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad , \quad \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad , \; a>0$$

$$\lim_{x\to \pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1 \quad , \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

Asymptoty funkcji

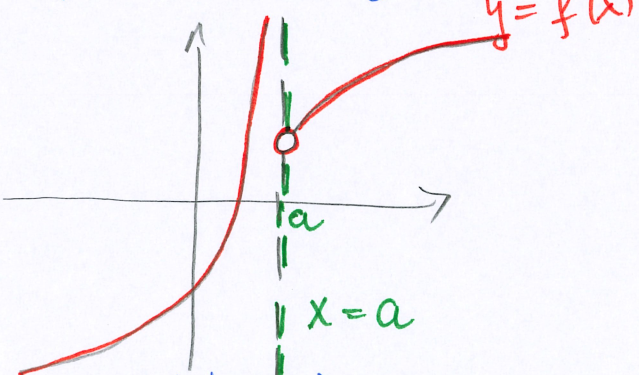
asymptoty pionowe:

Prosta $x=a$ jest asymptotą pionową lewostronną [prawostronną] funkcji f, gdy:

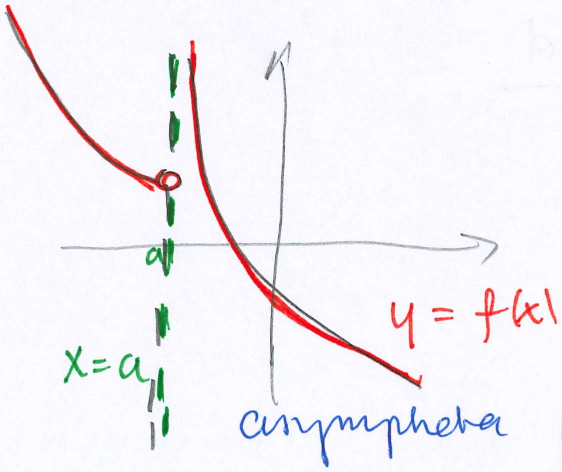
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \quad \text{lub} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$$

$[x \to a^+]$ $\qquad$ $[x \to a^+]$

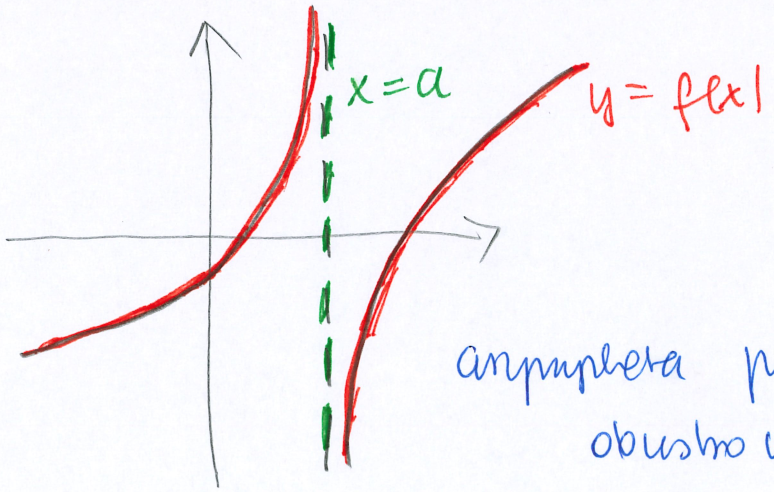
Prosta $x=a$ jest asymptotą pionową (obustronną) funkcji f, gdy jest asymptotą pionową lewostronną i prawostronną.



asymptota pionowa lewostronna



asymptota pionowa prawostronna

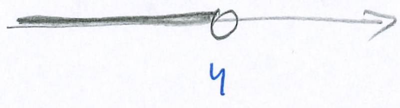


asymptota pionowa obustronna

UWAGA Funkcja elementarna może mieć asymptoty pionowe jedynie w skończonych krańcach dziedziny, które do niej nie należą.

Przykład $f(x) = \ln(4-x)$

Wyznaczamy dziedzinę: $D_f = (-\infty, 4)$



$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^-} \ln(4-x) = \ln 0^+ = -\infty$$

prosta $x = 4$ jest asymptotą pionową lewostronną

asymptoty ukośne;

Funkcja może mieć asymptoty ukośne jedynie w $+\infty$ lub w $-\infty$.

Prosta $y = A_1 x + B_1$ jest asymptotą ukośną funkcji f w $+\infty$, gdy

$$\lim_{x \to \infty} \left[f(x) - (A_1 x + B_1) \right] = 0.$$

Prosta $y = A_2 x + B_2$ jest asymptotą ukośną funkcji f w $-\infty$, gdy

$$\lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - (A_2 x + B_2) \right] = 0.$$

Jak wyznaczamy asymptoty ukośne:

$+\infty$: $\qquad\qquad$ $-\infty$:

(o ile jesteśmy w dziedzinie funkcji)

$$A_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad\qquad A_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$B_1 = \lim_{x\to\infty} [f(x) - A_1 x] \qquad\qquad B_2 = \lim_{x\to-\infty} [f(x) - A_2 x]$$

wtedy prosta: $y = A_1 x + B_1$ jest asymptotą ukośną w $+\infty$

wtedy prosta: $y = A_2 x + B_2$ jest asymptotą ukośną w $-\infty$

Przykład Wyznaczyć asymptoty (pionowe i ukośne) funkcji

$$f(x) = \frac{x^3+8}{x^2-4} \qquad D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, \infty)$$

asymptoty pionowe:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^3+8}{x^2-4} = \dfrac{16}{0^+} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^3+8}{x^2-4} = \dfrac{16}{0^-} = -\infty \end{array}\right\}$$

$x = 2$ jest asymptotą pionową obustronną

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{x^3+8}{x^2-4} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to-2^+} \frac{\cancel{(x+2)}(x^2-2x+4)}{(x-2)\cancel{(x+2)}} = \frac{12}{-4} \neq \pm\infty$$

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x^3+8}{x^2-4} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to-2^-} \frac{x^2-2x+4}{x-2} = \frac{12}{-4} \neq \pm\infty$$

nie ma asymptot

Asymptoty ukośne:

w $+\infty$:

$$A_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3+8}{x^2-4}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+8}{x^3-4x} = 1$$

$$B_1 = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+8}{x^2-4} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+8-x(x^2-4)}{x^2-4} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^3}+8-\cancel{x^3}+4x}{x^2-4} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x+8}{x^2-4} = 0$$

$$y = 1\cdot x + 0$$

$\underline{y = x}$ asymptota ukośna w $+\infty$

w $-\infty$:

$$A_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^3+8}{x^2-4}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+8}{x^3-4x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x^3}\left(1+\frac{8}{x^3}\right)}{\cancel{x^3}\left(1-\frac{4}{x^2}\right)} = 1$$

$$B_2 = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3+x}{x^2-4} - x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x+8}{x^2-4} = 0$$

$\underline{y = x}$ asymptota ukośna w $-\infty$

Ciągłość funkcji

Definicja

A) Otoczenie o promieniu $r>0$ punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ to zbiór

$$O(x_0, r) = (x_0 - r, x_0 + r)$$

B) Otoczenie lewostronne o promieniu $r>0$ punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ to zbiór

$$O(x_0^-, r) = (x_0 - r, x_0]$$

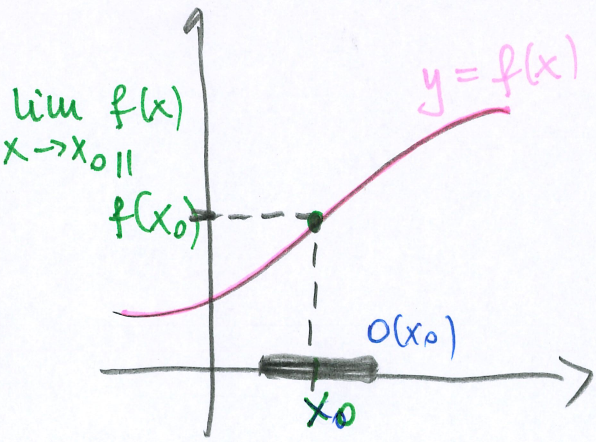
C) Otoczenie prawostronne o promieniu $r>0$ punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ to zbiór

$$O(x_0^+, r) = [x_0, x_0 + r)$$

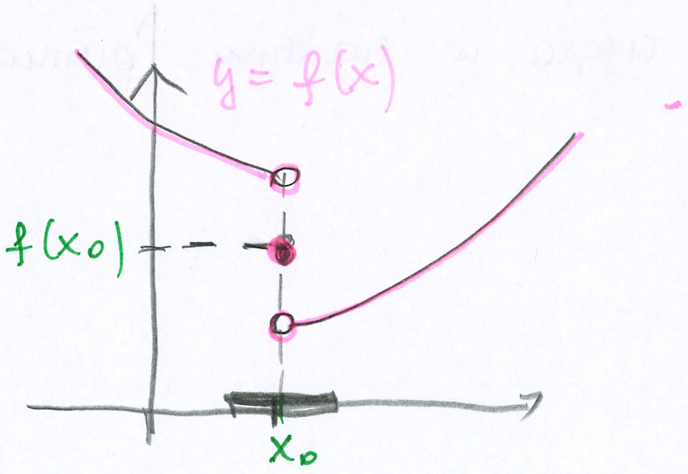
Piszemy krótko: $O(x_0)$, $O(x_0^-)$, $O(x_0^+)$.

Definicja Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech f będzie określona przynajmniej na otoczeniu $O(x_0)$. Funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$



f ciągła w punkcie x_0



f nieciągła w punkcie x_0

gdy x_0 jest tzw. punktem izolowanym dziedziny, czyli $x_0 \in D_f$, ale istnieje $S(x_0)$ takie, że $S(x_0) \cap D_f = \emptyset$, przyjmujemy, że f jest ciągła w x_0.

Definicja Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ i niech f będzie określona przynajmniej na otoczeniu $O(x_0^-)$. Funkcja f jest lewostronnie ciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

Definicja Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ i niech f będzie określona przynajmniej na otoczeniu $O(x_0^+)$. Funkcja f jest prawostronnie ciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Definicja Funkcja jest ciągła na zbiorze, jeśli jest ciągła w każdym punkcie tego zbioru.