SZEREGI LICZBOWE - zadania przykładowe

Zad.1 Zbadać zbieżność szeregu (kryt. Cauchy'ego):

A) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}\cdot 2^n,\ \ g=\frac{2}{e}<1$ - szereg zbieżny

B) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$, $g=\sqrt{\frac{2}{3}}<1$, szereg zbieżny

C) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(3-\frac{1}{n}\right)^{4n+1}}{\left(4+\frac{1}{n}\right)^{3n+2}}$, $g=\frac{81}{64}>1$ - szereg rozbieżny

D) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2n}}{4^n(n+2)^3}$, $g=\frac{e^2}{4}>1$, szereg rozbieżny

Zad.2 Zbadać zbieżność szeregu (kryt. d'Alemberta):

A) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2n}}{6^n(2n)!},\ \ g=\frac{1}{24}<1$ - szereg zbieżny

B) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$, $g=\frac{1}{e}<1$ - szereg zbieżny

C) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{n!}$, $g=0<1$ - szereg zbieżny

D) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2e^n}$, $g=\frac{4}{e}>1$ - szereg rozbieżny

Zad.3 Zbadać zbieżność szeregu (kryt. porównawcze, porównawcze ilorazowe):

A) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$, szereg zbieżny, np.:

$$\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}\leqslant\frac{2n+n}{n^4}=\frac{3}{n^3}$$

B) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{\sqrt[3]{n^2}}$ szereg rozbieżny, wskazówka: $\ln(n+1)\geqslant 1$ dla $n\geqslant 2$, stąd

$$\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}\leqslant\frac{\ln(n+1)}{\sqrt[3]{n^2}},\ \ n\geqslant 2$$

C) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}$, szereg zbieżny, np.:

$$\frac{1}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}\leqslant\frac{1}{n(\sqrt{n+3n}+\sqrt{n+3n})}=\frac{1}{n\cdot 4\sqrt{n}}=\frac{1}{4n^{\frac{3}{2}}}$$

D) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\sin\frac{1}{n}}}{n^2}$, szereg zbieżny wskazówka: $\sin\frac{1}{n}\leqslant\frac{1}{n}$, stąd

$$\frac{\sqrt{\sin\frac{1}{n}}}{n^2}\leqslant\frac{\sqrt{\frac{1}{n}}}{n^2}=\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$$

E) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ szereg rozbieżny, wskazówka: $\ln n\leqslant n-1$

$$\frac{1}{n}\leqslant\frac{1}{n-1}\leqslant\frac{1}{\ln n},\ \ n\geqslant 2$$

F) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n\sqrt{n+1}}}$ szereg rozbieżny, np.:

$$\frac{1}{2^{\frac{1}{4}} \cdot n^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{n\sqrt{n+n}}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n\sqrt{n+1}}}$$

Zad.4 Rozstrzygnąć, czy szereg jest zbieżny bezwzględnie, czy warunkowo:

A) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{4n+200}{5n+500}\right)^n$, zbieżny bezwzględnie, np. kryt. Cauchy'ego, $g = \frac{4}{5} < 1$

B) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}$, nie jest zbieżny bezwzględnie, np. kryt. porównawcze ilorazowe dla $b_n = \frac{\sqrt{n}}{n}$, zbieżny warunkowo

C) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ nie jest zbieżny ani bezwzględnie, ani warunkowo (nie spełnia warunku koniecznego)

D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+\ln n}$, szereg zbieżny bezwzględnie, wskazówka: $\ln n \geqslant 0$

$$\frac{1}{n^2 + \ln n} \leqslant \frac{1}{n^2}$$

E) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} n \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ zbieżny bezwzględnie, np. kryterium Cauchy'ego lub d'Alemberta ($g = \frac{1}{3}$)