Informatyka, WYKŁAD 2

Szeregi liczbowe i potęgowe

Definicja Szeregiem liczbowym nazywamy wyrażenie postaci

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots,$$

zapisywane też w formie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

gdzie (a_n) jest ciągiem liczbowym. Liczbę a_n nazywamy n-tym wyrazem szeregu, a sumę

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

nazywamy n-tą sumą częściową szeregu.

Przykład Oblicz n-tą sumę częściową szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n + 3^n}{10^n}$$

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{7+3}{10} + \frac{7^2+3^2}{10^2} + \ldots + \frac{7^n+3^n}{10^n} =$$

$$= \frac{7}{10} + \left(\frac{7}{10}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{7}{10}\right)^n + \frac{3}{10} + \left(\frac{3}{10}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{3}{10}\right)^n$$

$$= \frac{7}{10} \frac{1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n}{\frac{3}{10}} + \frac{3}{10} \frac{1 - \left(\frac{3}{10}\right)^n}{\frac{7}{10}} =$$

$$= \frac{7}{\cancel{10}} \cdot \frac{\cancel{10}}{3} \left(1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n\right) + \frac{3}{10} \cdot \frac{10}{7} \left(1 - \left(\frac{3}{10}\right)^n\right) =$$

$$= \frac{7}{3}\left(1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n\right) + \frac{3}{7}\left(1 - \left(\frac{3}{10}\right)^n\right)$$

$$\boxed{S_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}}$$

Definicja Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazywamy zbieżnym, gdy ciąg jego sum częściowych jest zbieżny do granicy właściwej. Wtedy granicę tą nazywamy sumą szeregu, czyli

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n$$ suma szeregu zbieżnego

Piszemy też: $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

n-tą resztą szeregu zbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazywamy liczbę

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k .$$

Analogicznie definiujemy szeregi postaci $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$, gdzie $n_0 \in \mathbb{Z}$.

Jeżeli mamy: $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$ lub $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$, to mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny do odpowiednio $-\infty$ albo $+\infty$.

W pozostałych przypadkach mówimy, że szereg jest rozbieżny.

Czyli:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = S \quad \text{szereg zbieżny do sumy } S$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty \quad \text{szereg rozbieżny do } \pm\infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \longrightarrow \lim_{n\to\infty} S_n \text{ nie istnieje} \quad \text{szereg rozbieżny}$$

Twierdzenie Jeżeli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ są zbieżne, to

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Fakt Szereg zbieżny z pogrupowanymi w dowolny sposób wyrazami ma tę samą sumę, co szereg wyjściowy.

UWAGA Dla szeregów rozbieżnych powyższy fakt nie jest prawdą, czyli wyrazów szeregu rozbieżnego nie wolno grupować, bo można otrzymać szeregi zbieżne o różnych sumach, np:

$$\underbrace{(1-1)}_{0} + \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\right)}_{0} + \underbrace{\left(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{3}\right)}_{0} + \ldots = 0$$

ale:

$$1 - \underbrace{\left(1-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\right)}_{0} - \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{3}\right)}_{0} - \underbrace{\left(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{3}-\ldots\right)}_{0} - \ldots = 1$$

UWAGA Absolutnie nie wolno zmieniać kolejności sumowania nieskończenie wielu wyrazów szeregu — nawet dla szeregów zbieżnych. Mamy np:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \dots = \ln 2,$$

ale

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots = \frac{3}{2}\ln 2$$

Przydatny fakt:

Szereg postaci $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ nazywamy szeregiem geometrycznym (x jest stałą rzeczywistą). Mamy:

$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$
- $\to$ jest zbieżny dla $|x| < 1$
- $\to$ jest rozbieżny do $+\infty$ dla $x \geq 1$
- $\to$ jest rozbieżny dla $x \leq -1$

Dla szeregu zbieżnego $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ (czyli gdy $|x| < 1$) mamy

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Przyjmujemy tutaj: $x^0 = 1$ – pierwszy wyraz.

np. $$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{3}{4}\right)^{n+1} = -\frac{3}{4} + \left(-\frac{3}{4}\right)^2 + \left(-\frac{3}{4}\right)^3 + \dots$$

jest zbieżny, bo $x = -\frac{3}{4} \in (-1,1)$ oraz

jego suma $S = \frac{1}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)} = \frac{1}{\frac{7}{4}} = \frac{4}{7}.$

Twierdzenie – warunek konieczny zbieżności szeregu

Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\underbrace{\lim_{n\to\infty} a_n = 0}$

dokładnie: $\lim_{n\to\infty} a_n$ istnieje i jest równa 0

Stąd wynika:

Jeżeli $\lim_{n\to\infty} a_n$ nie istnieje albo $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, to

szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $\underbrace{\text{nie jest zbieżny}}$.

rozbieżny do $\pm\infty$ lub rozbieżny } krótko: rozbieżny

Przykład Gdy mamy zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{1000}}$, to wystarczy zauważyć, że:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{1000}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{\sqrt[n]{n}}^{\to 1}}{\underbrace{\sqrt[n]{1000}}_{\to 1}} = \frac{1}{1} = 1 \neq 0$$

czyli $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{1000}}$ jest rozbieżny.

ALE UWAGA!: jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, to $\sum_{n=1} a_n$ może być zarówno zbieżny, jak i rozbieżny!!

KRYTERIA ZBIEŻNOŚCI SZEREGÓW

FAKT Szereg postaci $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ jest:

1) zbieżny dla $\alpha > 1$
2) rozbieżny do ∞ dla $\alpha \le 1$.

jest to ~~tzw.~~ szereg harmoniczny rzędu α

Kryterium porównawcze zbieżności (rozbieżności) szeregów

Rozważmy dwa szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1} b_n$ spełniające warunki:

1) $a_n, b_n \ge 0$ dla $\underbrace{\text{prawie wszystkich } n}_{\text{dla wszystkich z wyjątkiem skończonej ilości}}$

2) $a_n \le b_n$ dla $n \ge N$

Wtedy:

- jeżeli szereg $\sum_{n=1} b_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum_{n=1} a_n$ też jest zbieżny,
- jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ też jest rozbieżny.

Analogiczne twierdzenie jest prawdziwe dla szeregów o wyrazach niedodatnich $(a_n, b_n \le 0)$.

Przykład Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$.

Wygląda na zbieżny, więc próbujemy ograniczać z góry szeregiem zbieżnym:

$$\frac{1}{n^2+n} \leq \frac{1}{n^2} \quad \text{dla } n \geq 1$$

oraz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ jest zbieżny jako szereg harmoniczny rzędu $\alpha = 2$

Zatem na podstawie kryterium porównawczego $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$ jest zbieżny.

Przykład Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n^2-n}$.

Wygląda na rozbieżny, więc próbujemy ograniczać z dołu szeregiem rozbieżnym:

$$\frac{1}{n} = \frac{n}{n^2} \leq \frac{n+1}{n^2-n} \quad \text{dla } n \geq 2$$

oraz $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ jest rozbieżny jako szereg harmoniczny rzędu $\alpha = 1$

Zatem na podstawie kryterium porównawczego $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n^2-n}$ jest rozbieżny.

Kryterium ilorazowe zbieżności (rozbieżności) szeregów

Rozważmy dwa szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$ spełniające warunki:

1) $a_n, b_n > 0$ dla prawie wszystkich n

2) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$, $k \in (0, \infty)$.
stała (liczba)

Wtedy szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ są obydwa zbieżne

albo obydwa rozbieżne do ∞ $(-\infty)$.

Przykład Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{4^n - 3^n}$

mamy $a_n = \frac{3^n - 2^n}{4^n - 3^n}$, dobieramy szereg zbieżny

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$ (jest zbieżny jako szereg geometryczny)

i obliczamy:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^n - 2^n}{4^n - 3^n}}{\left(\frac{3}{4}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}}{\left(\frac{3}{4}\right)^n} = \underline{1}$$

$$= k > 0$$

Zatem z kryterium ilorazowego szereg $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{4^n - 3^n}$ jest zbieżny.

Kryterium d'Alemberta zbieżności (rozbieżności) szeregów

Rozważmy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Jeżeli $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \begin{cases} g<1, & \text{to } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ jest zbieżny} \\ g\in(1,\infty], & \text{to } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ jest rozbieżny} \\ g=1, & \text{to nie wiadomo.} \end{cases}$$

Przykład Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{2^n}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{2^n}\cdot 2}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{\cancel{2^n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2+1+2n} = 2 = g > 1$$

Zatem z kryterium d'Alemberta szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}$ jest rozbieżny.

Przykład Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{\pi^n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\ln(n+1)}{\pi^{n+1}}}{\frac{\ln n}{\pi^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{\cancel{\pi^n}\cdot\pi}\cdot\frac{\cancel{\pi^n}}{\ln n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\frac{\ln(n+1)}{\ln n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\frac{\ln n+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\left[1+\frac{\ln\left(1+\overbrace{\tfrac{1}{n}}^{\to 0}\right)}{\underbrace{\ln n}_{\to\infty}}\right] = \frac{1}{\pi}\left[1+\frac{\ln 1}{\infty}\right] = \frac{1}{\pi} =$$

$$= g < 1$$

Zatem z kryterium d'Alemberta szereg jest zbieżny.

Kryterium Cauchy'ego zbieżności (rozbieżności) szeregów

Rozważmy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Jeżeli $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} g<1, \text{ to } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ jest zbieżny} \\ g\in(1,\infty], \text{ to } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ jest rozbieżny} \\ g=1, \text{ to nie wiadomo.} \end{cases}$

Przykład: Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{3}{5}\right)^n$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|n\left(\frac{3}{5}\right)^n\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n\left(\frac{3}{5}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{5}\cdot\sqrt[n]{n} =$$

$$= \frac{3}{5} = g < 1$$

Zatem z kryterium Cauchy'ego szereg $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{3}{5}\right)^n$ jest zbieżny.

Przykład: Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=2}^{\infty} \ln^n\left(10+\frac{1}{n}\right)$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\ln^n\left(10+\frac{1}{n}\right)\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln^n\left(10+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \ln\left(10+\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \ln 10 = g > 1$$

Zatem z kryterium Cauchy'ego szereg jest rozbieżny.

Zbieżność bezwzględna szeregów

Twierdzenie Leibniza o szeregu naprzemiennym

Jeżeli: 1) ciąg (a_n) jest słabo malejący od pewnego indeksu N

2) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

to szereg naprzemienny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots$ jest zbieżny.

Przykład: Uzasadnić zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n^2+3}$

- $a_n = \frac{n+2}{n^2+3}$, badamy monotoniczność:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+3}{(n+1)^2+3} - \frac{n+2}{n^2+3} = \frac{(n+3)(n^2+3) - (n+2)(n^2+2n+4)}{(n^2+3)((n+1)^2+3)}$$

$$= \frac{(n^3+3n^2+3n+9) - (n^3+4n^2+8n+8)}{(n^2+3)((n+1)^2+3)} =$$

$$= \frac{\overbrace{-n^2-5n+1}^{<0}}{\underbrace{(n^2+3)}_{>0}\underbrace{((n+1)^2+3)}_{>0}} < 0$$

zatem ciąg (a_n) jest malejący

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+2}{n^2+3} = 0$

zatem z kryterium Leibniza szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n^2+3}$ jest zbieżny

Definicja Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny bezwzględnie, gdy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny.

Twierdzenie Jeżeli szereg jest zbieżny bezwzględnie, to jest zbieżny.

Definicja Szereg zbieżny, który nie jest zbieżny bezwzględnie, nazywamy szeregiem zbieżnym warunkowo.

Przykład Zbadać zbieżność bezwzględną szeregu
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^2}.$$

Zbadamy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-2)^n}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n \cdot 2^n}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$. Wykorzystamy kryterium d'Alemberta:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{2^n}\cdot 2}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{\cancel{2^n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2+2n+1} = 2 = g > 1,$$ więc szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-2)^n}{n^2}\right|$ jest rozbieżny, czyli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^2}$ nie jest zbieżny bezwzględnie.

Szeregi funkcyjne

Definicja Szeregiem funkcyjnym na zbiorze $X \subset \mathbb{R}$ nazywamy wyrażenie postaci

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) ,$$

gdzie $f_1, f_2, f_3, \ldots$ są funkcjami określonymi na zbiorze X. Funkcję f_n nazywamy n-tym wyrazem, zaś funkcję

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

n-tą sumą częściową tego szeregu.

Definicja Szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny w punkcie x_0, gdy w x_0 zbieżny jest jego ciąg sum częściowych $(S_n(x_0))$. Zbiór wszystkich punktów, w których szereg funkcyjny zbieżny, nazywamy jego obszarem zbieżności.

Szeregi potęgowe

Definicja Szereg funkcyjny postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n,$$

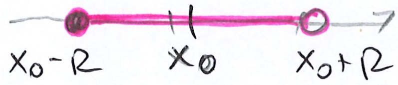
gdzie $x_0, c_n \in \mathbb{R}$ dla $n=0,1,2,\dots$ nazywamy szeregiem potęgowym o środku w x_0 i współczynnikach c_n.

Przyjmujemy: $(x-x_0)^0 = 1$ dla $x=x_0$.

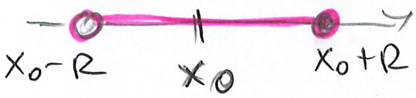
Twierdzenie: Obszarem zbieżności szeregu potęgowego jest przedział o środku w punkcie x_0. Przedział ten, nazywany przedziałem zbieżności, może mieć jedną z postaci

$\{x_0\}$

$(x_0-R,\ x_0+R)$



$[x_0-R,\ x_0+R)$



$(x_0-R,\ x_0+R]$

$[x_0-R,\ x_0+R]$

$(-\infty,\ \infty)$

Czyli dla zbadania zbieżności szeregu potęgowego:

1) wyznaczamy x_0

2) wyznaczamy promień R ze wzorów:

obliczamy $g = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$

wtedy $R = \begin{cases} 0, & \text{gdy } g = \infty \\ \frac{1}{g}, & \text{gdy } g \in (0,\infty) \\ \infty, & \text{gdy } g = 0 \end{cases}$

LUB

obliczamy $g = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right|$

wtedy $R = \begin{cases} 0, & \text{gdy } g = \infty \\ \frac{1}{g}, & \text{gdy } g \in (0,\infty) \\ \infty, & \text{gdy } g = 0 \end{cases}$

3) badamy zbieżność na końcach przedziału zbieżności, czyli w punktach $x_0 - R$, $x_0 + R$

Przykład Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(x-2)^n$$

- $c_n = \frac{1}{n}$, $x_0 = 2$
- promień zbieżności: $R = \frac{1}{g}$, $g = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

$\underline{R=1}$, mamy przedział $(1, 3)$

- Badamy zbieżność dla $\underline{x = x_0 - R = 2-1 = 1}$, czyli badamy zbieżność szeregu liczbowego $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(1-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ skorzystamy z kryterium Leibniza i mamy:

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n-(n+1)}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0, \text{ czyli } \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

ciąg jest malejący,
ponadto $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ zatem z kryterium Leibniza szereg $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ jest zbieżny

- Badamy zbieżność dla $\underline{x = x_0 + R = 2+1 = 3}$, czyli badamy zbieżność szeregu liczbowego $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – wiemy, że jest to szereg rozbieżny jako szereg harmoniczny z $\alpha = 1$

Zatem: Przedział zbieżności to $[1, 3)$