WYKŁAD 1 (Informacyjne) **Ciągi liczbowe**

Ciąg liczbowy (ciąg rzeczywisty) to każda funkcja

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}.$$

Wartość tej funkcji dla liczby $n \in \mathbb{N}$ nazywamy n-tym wyrazem ciągu i oznaczamy: a_n. Ciąg o takich wyrazach oznaczamy: (a_n).

Przykład:

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \qquad a(n) = 1 + \frac{1}{n}$$

piszemy wtedy: $a_n = 1 + \frac{1}{n}$, (a_n)

Definicja: Ciąg (a_n) jest ograniczony z dołu, gdy:

$$\exists_{m \in \mathbb{R}} \forall_{n \in \mathbb{N}} \quad m \leq a_n.$$

Ciąg (a_n) jest ograniczony z góry, gdy:

$$\exists_{M \in \mathbb{R}} \forall_{n \in \mathbb{N}} \quad a_n \leq M.$$

Ciąg (a_n) jest ograniczony, gdy:

$$\exists_{m, M \in \mathbb{R}} \forall_{n \in \mathbb{N}} \quad m \leq a_n \leq M.$$

Uwaga: Warunek na to, aby (a_n) był ograniczony można zapisać w postaci:

$$\exists_{M \in \mathbb{R}} \ \forall_{n \in \mathbb{N}} \ |a_n| \leq M .$$

Definicja Ciąg (a_n) jest rosnący [słabo rosnący], gdy:

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \ a_n < a_{n+1} \qquad \left[\forall_{n \in \mathbb{N}} \ a_n \leq a_{n+1}\right]$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots \qquad a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots$$

Ciąg (a_n) jest malejący [słabo malejący],

gdy: $$\forall_{n \in \mathbb{N}} \ a_n > a_{n+1} \qquad \left[\forall_{n \in \mathbb{N}} \ a_n \geq a_{n+1}\right]$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

$$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots \qquad a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{ciągi rosnące} \\ \text{ciągi słabo rosnące} \\ \text{ciągi malejące} \\ \text{ciągi słabo malejące} \end{array}\right\} \text{ciągi monotoniczne}$$

pozostałe ciągi

Jak PRAKTYCZNIE badamy monotoniczność ciągu:

1) (a_n) – dowolny ciąg, to badamy różnicę

$a_{n+1} - a_n$
- > 0, to (a_n) jest rosnący
- ≥ 0, to (a_n) jest słabo rosnący
- < 0, to (a_n) jest malejący
- ≤ 0, to (a_n) jest słabo malejący

2) (a_n) – ciąg o wyrazach dodatnich $\left[\forall_{n \in \mathbb{N}} \, a_n > 0\right]$, to badamy iloraz

$\frac{a_{n+1}}{a_n}$
- > 1, to (a_n) jest rosnący
- ≥ 1, to (a_n) jest słabo rosnący
- < 1, to (a_n) jest malejący
- ≤ 1, to (a_n) jest słabo malejący

GRANICA CIĄGU

Definicja Ciąg (a_n) jest zbieżny do liczby $g \in \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon > 0} \; \exists_{N \in \mathbb{N}} \; \forall_{n \geq N} \; |a_n - g| < \varepsilon .$$

Piszemy wtedy: $\lim_{n \to \infty} a_n = g$ lub $a_n \to g$,

o liczbie g mówimy, że jest granicą właściwą ciągu.

Definicja Ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy niewłaściwej $+\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{N\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\geq N}\quad a_n > \varepsilon .$$

Piszemy wtedy: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ lub $a_n \to \infty$.

Ciąg (a_n) jest zbieżny do granicy niewłaściwej $-\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall_{\varepsilon<0}\ \exists_{N\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\geq N}\quad a_n < \varepsilon$$

Piszemy wtedy: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ lub $a_n \to -\infty$.

Czyli może się zdarzyć:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$
- $\Rightarrow = g \in \mathbb{R}$ – granica właściwa
- $\Rightarrow = +\infty$ lub $-\infty$ – granice niewłaściwa

} ciągi zbieżne

- $\Rightarrow$ nie istnieje } ciągi rozbieżne

Innych możliwości nie ma.

PRZYDATNE FAKTY:

1) Granice ciągu zbieżnego (do g lub $+\infty$ lub $-\infty$) nie zależy od wartości skończonej ilości jego wyrazów.

2) $$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{gdy } |q|<1 \\ 1, & \text{gdy } q=1 \\ \infty, & \text{gdy } q>1 \\ \text{nie ist.}, & \text{gdy } q \le 1 \end{cases}$$

(q - stała)

granica ciągu geometrycznego

3) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, dla $a>0$ (można wykazać na podstawie definicji)

Twierdzenia o granicach właściwych

Twierdzenie Jeśli ciąg jest zbieżny do granicy właściwej, to jest ograniczony.

Implikacja odwrotna nie jest prawdziwa - np. ciąg (a_n), gdzie $a_n = (-1)^n$ jest ograniczony:

$$-1 \le a_n \le 1,$$

ale nie jest zbieżny.

Twierdzenie (o działaniach na granicach ciągów)

Jeżeli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne do granic właściwych, to:

- $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$

- $\lim_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n$, $c \in \mathbb{R}$

- $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$

- $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$, o ile $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$.

- $\lim_{n\to\infty}(a_n)^p = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^p$, $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

- $\lim_{n\to\infty}\sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim_{n\to\infty} a_n}$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

Twierdzenie

Jeżeli (a_n) jest ograniczony i $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$,

to $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = 0$.

Twierdzenie (o trzech ciągach)

Jeśli ciągi (a_n), (b_n), (c_n) spełniają warunki

1) $\underset{N\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n\geq N}{\forall}\quad a_n \leq b_n \leq c_n$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = g$

to $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = g$.

Przykład: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n+5^n}$

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

$$\sqrt[n]{5^n} \leq \sqrt[n]{2^n+3^n+5^n} \leq \sqrt[n]{5^n+5^n+5^n}$$

$$\sqrt[n]{5^n} = 5 \to 5$$

ciąg stały: $5, 5, 5, \ldots$

$$\sqrt[n]{5^n+5^n+5^n} = \sqrt[n]{3\cdot 5^n} = \sqrt[n]{3}\cdot 5$$

$\sqrt[n]{3} \to 1$, $5 = 5$; $1 \cdot 5$

ciąg stały

z własności $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$, $a>0$

Zatem z tw:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+3^n+5^n} = 5$$

DEFINICJA LICZBY e

Twierdzenie Ciąg słabo rosnący (dla $n \geq N$) oraz ograniczony z góry jest zbieżny do granicy właściwej.

Twierdzenie

Ciąg (e_n), gdzie $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ jest rosnący i ograniczony z góry.

Wniosek:

Ciąg (e_n) jest zbieżny.

Granicę tego ciągu oznaczamy przez e, mamy więc:

$$e \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$e \approx 2{,}7182\ldots$ wartość liczby e w przybliżeniu

$\log_e x =: \ln x$ logarytm naturalny

$e^x =: \exp x$ eksponens

FAKT: Jeżeli 1) $a_n > 0$ dla $n = 1, 2, \dots$ $[a_n < 0]$

2) $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ $[\lim_{n\to\infty} a_n \to -\infty]$

to $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = 0.$

Przykład:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^{3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left[\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n+2}\right]^3}{\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^6} = \frac{e^3}{1} = e^3$$

Twierdzenie (o dwóch ciągach)

Jeżeli ciągi (a_n), (b_n) spełniają warunki:

1) $\exists_{N \in \mathbb{N}} \ \forall_{n \geq N} \ a_n \leq b_n$

2) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

to $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty.$

Prawdziwe jest analogiczne twierdzenie dla ciągów zbieżnych do $-\infty$.