

# Wzrost AD 1 (Informacje)

## Ciągi liczbowe

Ciąg liczbowy (ciąg rzeczywisty) to konkretna funkcja

$$a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Wartości tej funkcji dla każdego  $n \in \mathbb{N}$  nazywamy

$n$ -tym wyrazem ciągu i oznaczamy:  $a_n$ .

Ciąg o takich wyrazach oznaczamy:  $(a_n)$ .

Przykład:

$$a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \quad a(n) = 1 + \frac{1}{n}$$

piąty wyraz:  $a_5 = 1 + \frac{1}{5}, \quad (a_n)$

Definicja: Ciąg  $(a_n)$  jest ograniczony z dołu,

gdzie:

$$\exists m \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad m \leq a_n.$$

Ciąg  $(a_n)$  jest ograniczony z góry, gdzie:

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq M.$$

Ciąg  $(a_n)$  jest ograniczony, gdzie:

$$\exists m, M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad m \leq a_n \leq M.$$

Uwaga: Wamien ne to, aby  $(a_n)$  byt szeregowany

mozne zapisać w postaci:

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leq M.$$

Definicja Ciąg  $(a_n)$  jst rosnący [siabo rosnący],

gdz:  $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n < a_{n+1}$        $[\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq a_{n+1}]$



$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots$$



$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots$$

ciąg  $(a_n)$  jst malejący [siabo malejący],

gdz:  $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n > a_{n+1}$        $[\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \geq a_{n+1}]$



$$a_1 > a_2 > a_3 > \dots$$



$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots$$

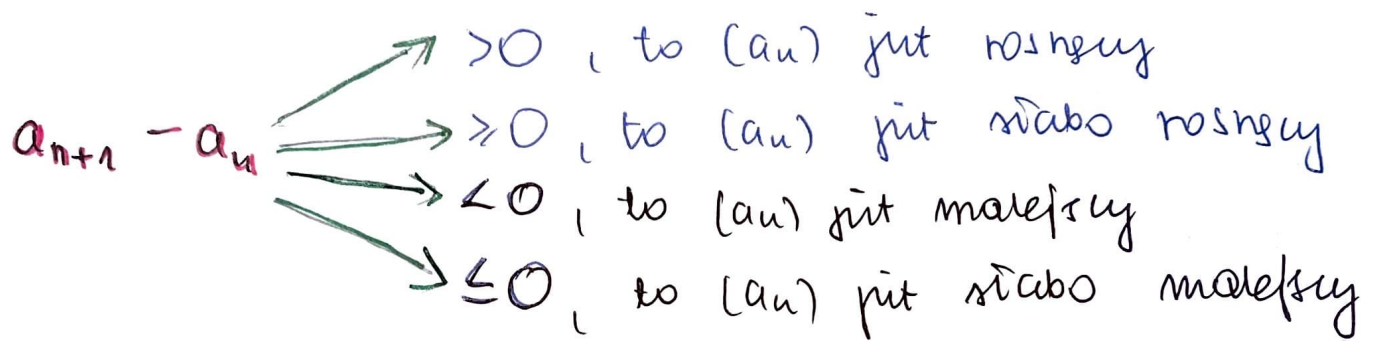
ciąg rosnący  
ciąg siabo rosnący  
ciąg malejący  
ciąg siabo malejący

ciąg  
monotoniczny

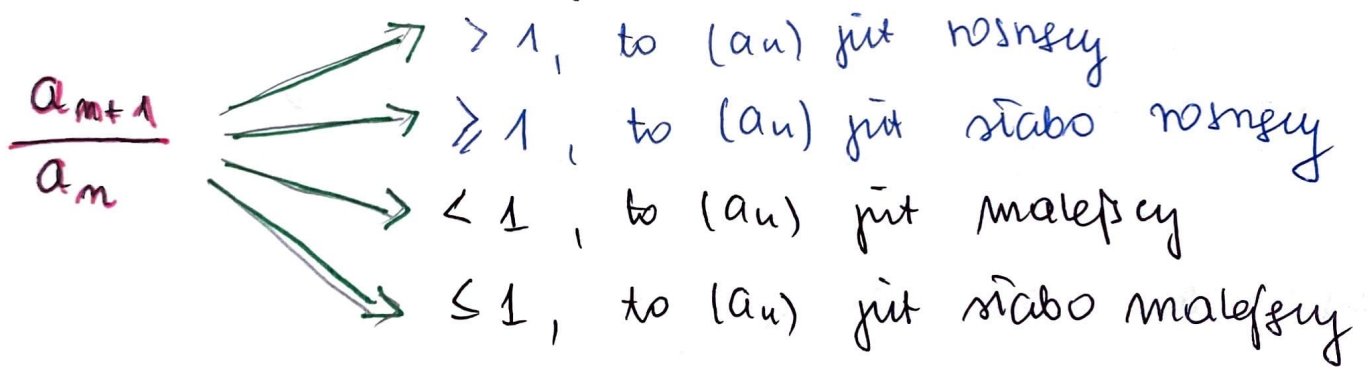
pozostate ciągi

## Jak PRAKTYCZNIĘ badaemy monotoniczność ciągu:

1)  $(a_n)$  - dowolny ciąg; to badamy różnicę



2)  $(a_n)$  - ciąg o wyrazach dodatnich  $[\forall a_n > 0, n \in \mathbb{N}]$ ,  
to badamy iloraz



## GRANICA CIĄGU

Definicja Ciąg  $(a_n)$  jest zbieżny do liczby  $q \in \mathbb{R}$   
wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |a_n - q| < \varepsilon.$$

Pisemy wtedy:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = q$  lub  $a_n \rightarrow q$ ,

o liczbie  $q$  mówimy, że jest granicą właściwą ciągu.

## Definicja

ciąg  $(a_n)$  jest zbieżny do granicy  
miejscowej  $+\infty$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad a_n > \varepsilon.$$

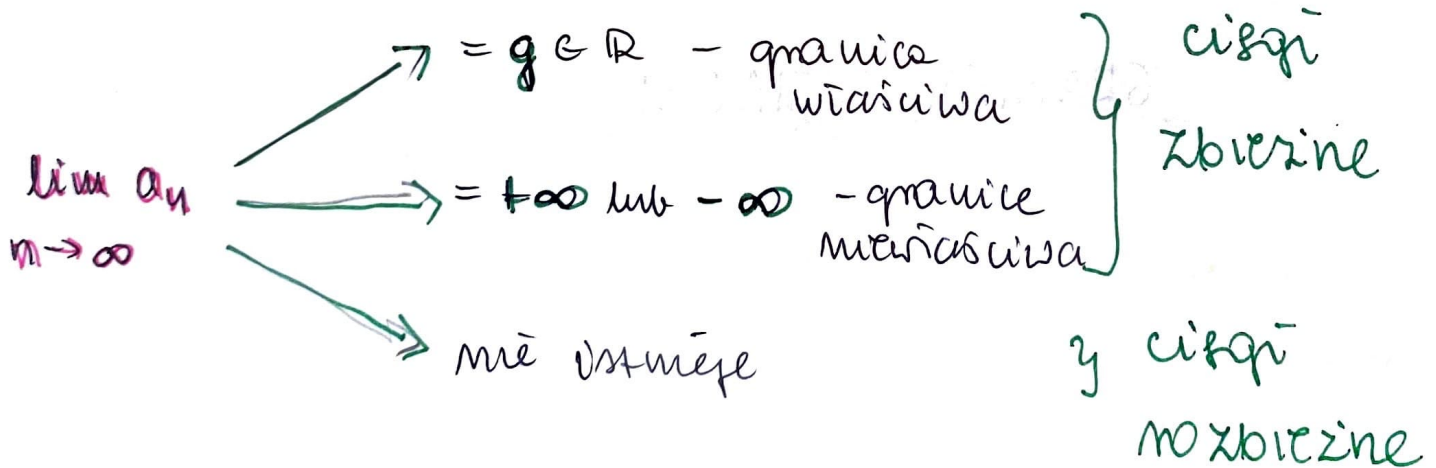
Pierwszy wtedy:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$  lub  $a_n \rightarrow \infty$ .

ciąg  $(a_n)$  jest zbieżny do granicy  
miejscowej  $-\infty$  wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \varepsilon < 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad a_n < \varepsilon$$

Pierwszy wtedy:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$  lub  $a_n \rightarrow -\infty$ .

Cyfrę może się zdarzyć:



Innych możliwości nie ma.

## PRZYDATNE FAKTY:

1) Granice ciągu zbieżnego (do  $g$  lub  $+\infty$  lub  $-\infty$ )  
mają zawsze od wartości skrajnej różnicę jego  
wyrazów.

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{gdym } |q| < 1 \\ 1 & \text{gdym } q = 1 \\ \infty & \text{gdym } q > 1 \\ \text{nie ist.} & \text{gdym } q \leq -1 \end{cases}$$

granice  
ciągu  
geometrycznego

3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ , dla  $a > 0$  (można wyliczyć  
nie podając definicji)

## Twierdzenia o granicach własnych

Twierdzenie Jeśli ciąg jest zbieżny do granicy  
własnej, to jest ograniczony.

Implikacja odwrotna nie jest prawdziwa - np.  
ciąg  $(a_n)$ , gdzie  $a_n = (-1)^n$  jest ograniczony:

$$-1 \leq a_n \leq 1,$$

ale nie jest zbieżny.

Twierdzenie (o działaniach na granicach ciągów)

Jeżeli ciągi  $(a_n)$  i  $(b_n)$  są zbieżne do granic właściwych, to:

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} \quad , \quad \text{o ile } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0.$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^p = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^p \quad , \quad p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} \quad , \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$$

Twierdzenie

Jeżeli  $(a_n)$  jest ograniczony i  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ ,

$$\text{to } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = 0.$$

## Twierdzenie (o trzech ciągach)

zadani ciągów  $(a_n)$ ,  $(b_n)$ ,  $(c_n)$  spełniających warunki

$$1) \quad \exists \quad \forall \quad a_n \leq b_n \leq c_n \\ \mathbb{N} \in \mathbb{N} \quad n \geq N$$

$$2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = g$$

$$\text{to } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g.$$

Przykład:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 5^n}$$

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

$$\sqrt[n]{5^n} \leq \sqrt[n]{2^n + 3^n + 5^n} \leq \sqrt[n]{5^n + 5^n + 5^n}$$

$$\parallel \\ 5 \rightarrow 5$$

$$\parallel \\ \sqrt[n]{3 \cdot 5^n}$$

ciąg stały:  
5, 5, 5, ...

$$\parallel \\ \sqrt[n]{3} \cdot 5 \\ \leftarrow 1 \cdot 5 \\ \parallel \\ 5$$

ciąg stały

z własności

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1, \\ a > 0$$

Zatem z tw:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 5^n} = 5$$

## DEFINICJA LICZBY $e$

Twierdzenie Ciąg niemalejący (dla  $n \geq N$ ) oraz ograniczony z góry jest zbieżny do granicy własnej.

### Twierdzenie

Ciąg  $(e_n)$ , gdzie  $e_n = (1 + \frac{1}{n})^n$  jest niemalejący i ograniczony z góry.

### Wniosek:

Ciąg  $(e_n)$  jest zbieżny.

Granice tego ciągu oznaczamy przez  $e$ , mamy więc:

$$e \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$e \approx 2,7182\dots$  wartości liczby  $e$  w przybliżeniu

$\log_e x =: \ln x$  logarytm naturalny

$e^x =: \exp x$  eksponenta



FAKT: jeżeli 1)  $a_n > 0$  dla  $n=1, 2, \dots$

$$[a_n < 0]$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$$

$$[\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \rightarrow -\infty]$$

to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = 0.$$

---

---

Przykład:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left[\left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^{n+2}\right]^3}{\left(1 + \frac{1}{n+2}\right)^6} = \frac{e^3}{1} = e^3$$

Twierdzenie (o dwóch ciągach)

Jeżeli ciągi  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  spełniają warunki:

$$1) \exists N \forall n > N \quad a_n \leq b_n$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$$

to  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$ .

Przedstawione jest analogiczne twierdzenie dla ciągów zbieżnych do  $-\infty$ .