# UŚREDNIANIE CYFROWE PRZY POMIARACH SYGNAŁÓW ZAKŁÓCONYCH

Cel: Zapoznać się z zasadami oraz wyznaczaniem podstawowych parametrów uśredniania cyfrowego (częśtotliwości próbkowania, minimalnej liczebności próbek oraz funkcji wagowych) podczas pomiaru sygnałów

## Plan wykładu

1. Wstęp. Uśrednianie zwykłe (równoważne).
2. Tłumienie (eliminacja) składowych harmonicznych
3. Zwiększenie stopnia tłumienia składowych harmonicznych. Uśrednianie wagowe.
4. Tłumienie składowych harmonicznych szerokim paśmie częstotliwościowym. Funkcja wagowa Dolpha-Czebyszewa

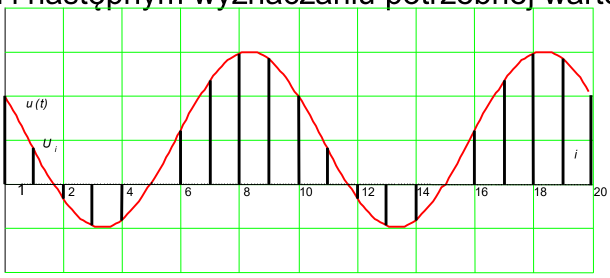
## 1. Wstęp. Uśrednianie zwykłe (równoważne)

Podstawowe parametry sygnałów okresowych

- Składowa stała – wartość średnia
- Wartość średnia- wyprostowana
- Wartość skuteczna
- Moc

Inne

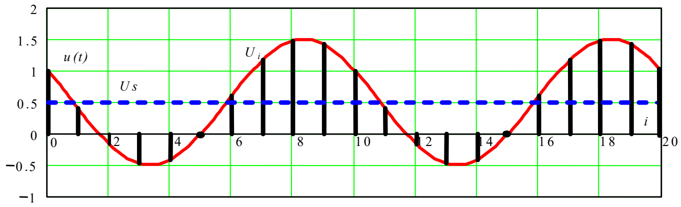
Te parametry mogą być wyznaczony na podstawie próbek sygnału $U_1, U_2, \ldots, U_n$) w dyskretny momenty czasowe $t_1, t_2, \ldots, t_n$ i następnym wyznaczaniu potrzebnej wartości




## 1. Wstęp. Uśrednianie zwykłe (równoważne)

**Wartość składowej stałej sygnału – wartość średnia**

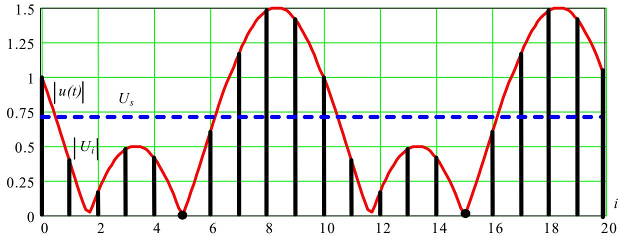
$$U_0 = U_{DC} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} U_i = \frac{U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_N}{N}$$



## 1. Wstęp. Uśrednianie zwykłe (równoważne)

### Wartość średnia wyprostowana sygnału

$$U_{SW} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}|U_i| = \frac{|U_1|+|U_2|+|U_3|+\ldots+|U_N|}{N}$$

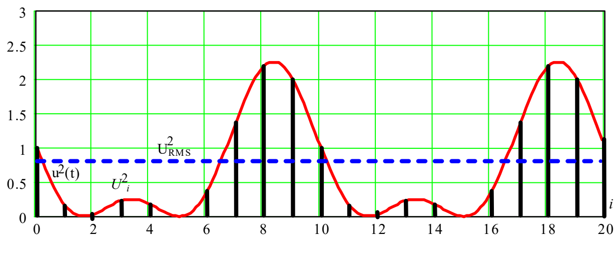




## 1. Wstęp. Uśrednianie zwykłe (równoważne)


### Wartość skuteczna sygnału

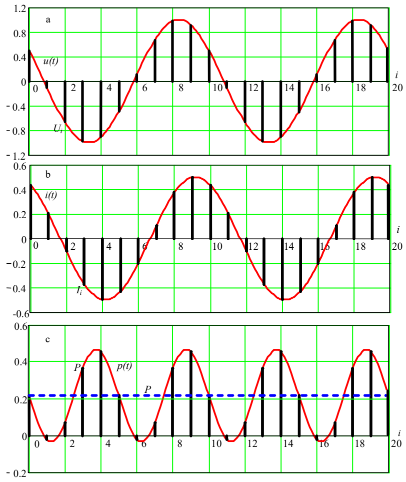
$$U_{TrueRMS} = U = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}U_i^2} = \sqrt{\frac{U_1^2+U_2^2+U_3^2+\ldots+U_N^2}{N}}$$



# 1. Wstęp. Uśrednianie zwykłe (równoważne)

**Wartość mocy czynnej**

$$P = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} U_i \cdot I_i = \frac{U_1 \cdot I_1 + U_2 \cdot I_2 + U_3 \cdot I_3 + \ldots + U_N \cdot I_N}{N}$$




# 2. Tłumienie (eliminacja) składowych harmonicznych w trakcie ich uśredniania

2.1. Skuteczność uśredniania.

We wszystkich algorytmach pomiarów parametrów sygnałów zmiennych po odpowiednim przetwarzaniu sygnału wejściowego istnieją:

- korzystna składowa w postaci składowej stałej Ux;
- niekorzystna składowa w postaci składowych harmonicznych Uh(t) przetworzonego sygnału

$$U_i = U_x + U_h(t_i)$$

## 2. Tłumienie (eliminacja) składowych harmonicznych w trakcie ich uśredniania

2.1. Skuteczność uśredniania.

Według definicji parametrów sygnałów zmiennych zadaniem operacji uśredniania

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}U_i = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(U_x + U_h(t_i)\right) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}U_x + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}U_h(t_i) =$$
$$= U_x + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}U_h(t_i)$$

- wyznaczanie składowej stałej przetworzonego odpowiednio do mierzonego parametru sygnału;

- eliminacja (tłumienie) składowych harmonicznych, wynikających podczas odpowiedniego przetwarzania sygnału.

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}U_h(t_i) = \Delta U_h \to 0$$

## 2. Tłumienie (eliminacja) składowych harmonicznych w trakcie ich uśredniania

2.1. Skuteczność uśredniania.

Skuteczność eliminacji (tłumienia) niekorzystnych składowych harmonicznych na drodze uśredniania próbek sygnału może być scharakteryzowana

- błędem uśredniania , który powinien dążyć do zera $\Delta U_h \to 0$ ,

- współczynnikiem tłumienia $K_{tł}$, jako stosunek amplitudy $U_{h,m}$ składowej harmonicznej do modułu maksymalnego błędu $|\Delta U_{h,\max}|$

$$K_{tl} = \frac{U_{h,m}}{|\Delta U_{h,\max}|} \qquad K_{tl,dB} = 20\lg\left[\frac{U_{h,m}}{|\Delta U_{h,\max}|}\right]$$

## 2. Tłumienie (eliminacja) składowych harmonicznych w trakcie ich uśredniania

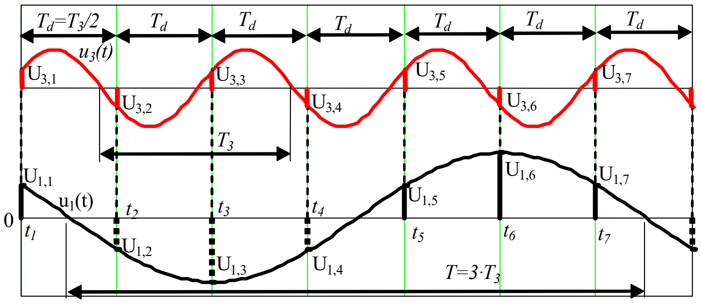
**2.1. Podstawowe zagadnienia cyfrowego uśredniania sygnałów :**

- Wyznaczanie **minimalnej liczby $N_{min}$ uśrednianych próbek** sygnału niezbędnych dla teoretycznie całkowitej eliminacji składowych harmonicznych; oraz
- Wyznaczanie okresu $T_d$ (częstotliwości $f_d$) próbkowania.

## 2. Tłumienie (eliminacja) składowych harmonicznych w trakcie ich uśredniania

**2.2. Podstawowa + *k*-ta składowa harmoniczna sygnału przetworzonego.**

Eliminacja wpływu podstawowej oraz 3-ej składowej harmonicznej (k=3)



## 2.3. Uogólnione wyrażenia tłumienia składowych harmonicznych podczas uśredniania spróbkowanego sygnału

Wartość średnia N próbek sygnału harmonicznego

$$u_h(t)=U_{h,m}\cos(2\pi f t+\varphi)$$

o amplitudzie $U_{h,m}$, częstotliwości $f=\frac{\omega}{2\pi}$

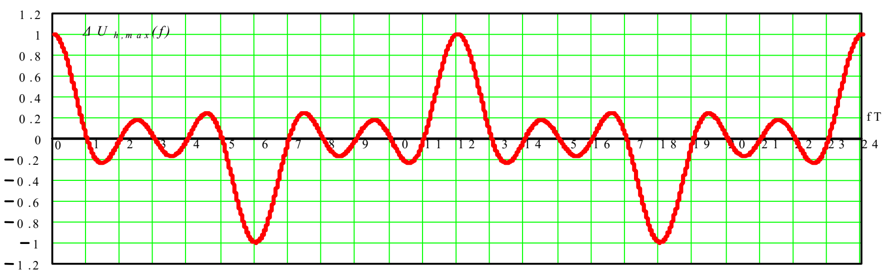
przy okresie próbkowania $T_d=T/N$ wynosi

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}u_h(t_i)=\Delta U_h(f)=\frac{U_{h,m}}{N}\sum_{i=1}^{N}\cos(2\pi f T_d\cdot i+\varphi)=U_{h,m}\cos\left(\pi f T\frac{(N-1)}{N}+\varphi\right)\frac{\frac{1}{N}\sin(\pi f T)}{\sin\left(\pi f\frac{T}{N}\right)}.$$

## 2.3. Uogólnione wyrażenia tłumienia składowych harmonicznych podczas uśredniania spróbkowanego sygnału

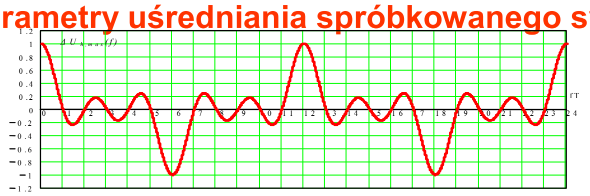
Wartość maksymalna błędu $\left|\cos\left(\pi f T\frac{(N-1)}{N}+\varphi\right)\right|_{\max}=1$

$$\Delta U_{h,\max}=U_{h,m}\frac{\frac{1}{N}\sin(\pi f T_d N)}{\sin(\pi f T_d)}=U_{h,m}\frac{\frac{1}{N}\sin(\pi f T)}{\sin\left(\pi f\frac{T}{N}\right)}.$$




Zależność maksymalnej wartości błędu składowych harmonicznych przy uśrednianiu N=6 próbek sygnału wciągu jego okresu T

## Parametry uśredniania spróbkowanego sygnału



Innymi słowami, dla eliminowania wpływu (tłumienia) składowych harmonicznych do $k$-ej włącznie (przy $f_m=k\cdot f_1$) liczba uśrednianych próbek (pobranych w jednym okresie sygnału) powinna być o jeden większą

$$N_{min}=k+1$$

zamiast $N=2k$ jak to wynika z twierdzenia Kotelnikowa Schannona.

Minimalna częstotliwość próbkowania powinna równać się

$$f_{d,min}=f_1\cdot N_{min}=f_1\cdot(k+1)=f_m+f_1.$$

to znaczy, że ona powinna być tylko o $(k+1)$ razy zamiast $2\cdot k$ razy większą od częstotliwości podstawowej składowej.

## Przykład 1

Wyznaczyć minimalną liczbę próbek oraz częstotliwość próbkowania sygnału z warunku zapewnienia tłumienia wszystkich składowych harmonicznych od 1-ej do 15-tej, stosując uśrednianie próbek.

Rozwiązanie. Ponieważ numer maksymalnej składowej harmonicznej równa się $k=15$, wtedy minimalna liczba próbek wynosi

$$N_{min}=k+1=15+1=16.$$

Częstotliwość próbkowania powinna być o 16 razy większą od częstotliwości podstawowej składowej zamiast $2\cdot 15=30$ razy.

## Poziom tumienia

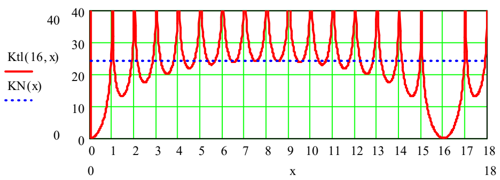
Maksymalny poziom obwiedni współczynnika tłumienia ma miejsce na częstotliwości równej połowie częstotliwości próbkowania

$f=f_{d,min}/2$

i ten poziom równa się liczbie próbek N (maksymalny błąd $\Delta_{u,m}=U_m/N$):

$K_{tl}=N$ lub $20\lg(N)$ w decybeli.

Przykładowo, przy $N=16$ **$K_{tl,db}=20\lg(16)=24$ dB**




## 3. Zwiększenie stopnia tłumienia składowych harmonicznych. Uśrednianie wagowe

W rzeczywistości okres sygnału oraz częstotliwości składowych harmonicznych mogą się zmieniać lub ich wartości mogą odbiegać od wartości nominalnych.

W takich przypadkach w wyniku uśredniania składowe harmoniczne nie będą stłumione (eliminowane) całkowicie, a pozostanie błąd uśredniania, wartość którego zależy od stopnia odchylenia okresu (częstotliwości) od nominalnej wartości i jego można obliczyć według wzoru

$$\Delta U_{h,\max} = U_{h,m} \frac{\frac{1}{N}\sin(\pi f T)}{\sin\left(\pi f \frac{T}{N}\right)}.$$

## 3.1. Małe odchylenia okresu sygnału od nominalnej wartości

Do małych względnych odchyleń okresu $|\delta_T|$ (dla odchyleń częstotliwości $\delta_f \approx -\delta_T$ ) będziemy zaliczać taki, dla których są spełniane warunki:

$$|\delta_T| = \left|\frac{\Delta T}{T_n}\right| \approx |\delta_f| = \left|\frac{\Delta f}{f_{1,n}}\right| << 1$$

Założymy, że trwałość rzeczywista okresu sygnału różni się od nominalnej o : $T = T_n(1+\delta_T)$

Ponieważ względne odchylenia okresu i częstotliwości posiadają różne znaki , to przy nominalnej częstotliwości $f_{1,n} = 1/T_n$ podstawowej składowej jej wartość rzeczywista różni na się na :

$$f_1 = \frac{1}{T_{1,n}(1+\delta_T)} \cong f_{1,n}(1-\delta_T) = f_{1,n}(1+\delta_f)$$

w takim razie częstotliwości *k*-tej składowej harmonicznej sygnału równają się

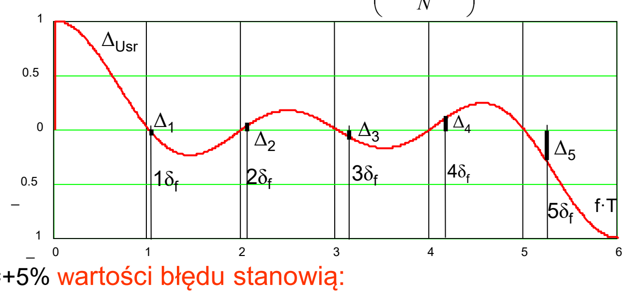
$$f_k = kf_1 = kf_{1,n}(1+\delta_f)$$

## 3.1. Małe odchylenia okresu sygnału od nominalnej wartości

Wtedy przy $f_{1,n}T_n =$ oraz $\sin(\pi k f_{1,n} T_n (1+\delta_f)) = \sin(\pi k + \pi k \delta_T) = (-1)^k \sin(\pi k \delta_f)$

wartość maksymalna błędu uśredniania wynosi

$$\Delta U_{h,\max} = U_{h,m} \frac{(-1)^k \frac{1}{N} \sin(\pi k \delta_f)}{\sin\left(\frac{\pi k (1+\delta_f)}{N}\right)}$$




Przy $\delta_f$=+5% wartości błędu stanowią:

$\Delta_1$=-0.05; $\Delta_2$=0.058; $\Delta_3$=-0.076; $\Delta_4$=0.121; $\Delta_5$=-0.308

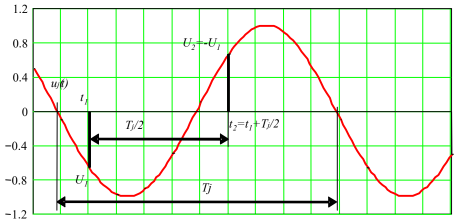
# 3.2. Uśrednianie wagowe. Proste funkcji wagowe

W celu zwiększenia tłumienia składowych harmonicznych przy małych odchyleniach częstotliwości można wykorzystać tak zwane powtórne uśrednianie, w najbardziej uproszczonej postaci polegające w uśrednianiu dwóch szeregów próbek sygnału, przesuniętych w czasie na pół okresu

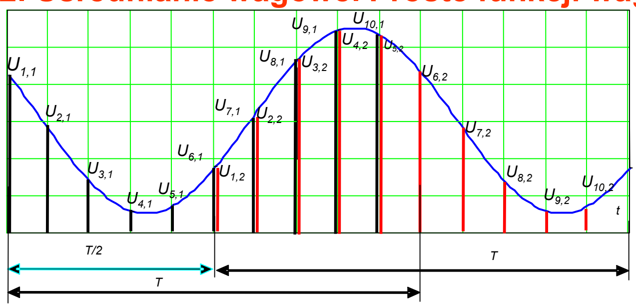
$\tau = T_j/2$

j-tej składowej harmonicznej, ponieważ wartości tej harmonicznej przez pół okresu zmienia swój znak na przeciwny:

$U_j(t+T_j/2) = -U_j(t)$ $\qquad \tau_{p,1} = \frac{1}{2f_1} = \frac{T_1}{2} = \frac{T}{2} = \frac{N}{2}T_d$



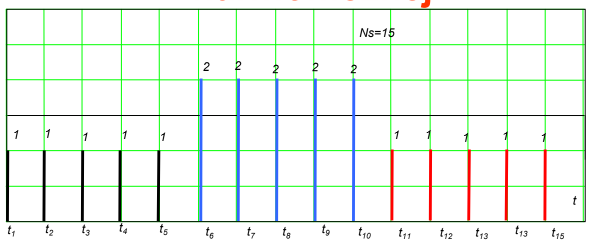

# 3.2. Uśrednianie wagowe. Proste funkcji wagowe




$$U_{1-2,sr} = \frac{1}{2}\left[\frac{U_{1,1}+U_{2,1}+U_{3,1}+U_{4,1}+U_{5,1}+U_{6,1}+U_{7,1}+U_{8,1}+U_{9,1}+U_{10,1}}{10} + \frac{U_{1,2}+U_{2,2}+U_{3,2}+U_{4,2}+U_{5,2}+U_{6,2}+U_{7,2}+U_{8,2}+U_{9,2}+U_{10,2}}{10}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{U_1+U_2+U_3+U_4+U_5+U_6+U_7+U_8+U_9+U_{10}}{10} + \frac{U_6+U_7+U_8+U_9+U_{10}+U_{11}+U_{12}+U_{13}+U_{14}+U_{15}}{10}\right] =$$

## Funkcja wagowa: 1-2-1
## dla dodatkowego tłumienia 1-ej składowej harmonicznej

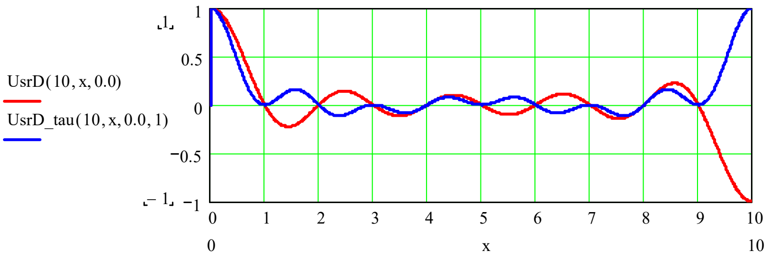



Zależność błędów przy zwykłym oraz wagowym (dodatkowe tłumienie 1-ej harmonicznej) uśrednianiu (N=10)

$$\Delta U_{h,\max} = U_{h,m} \frac{\frac{1}{N}\sin(\pi f T)}{\sin\left(\pi f \frac{T}{N}\right)} \cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{fT}{1}\right).$$

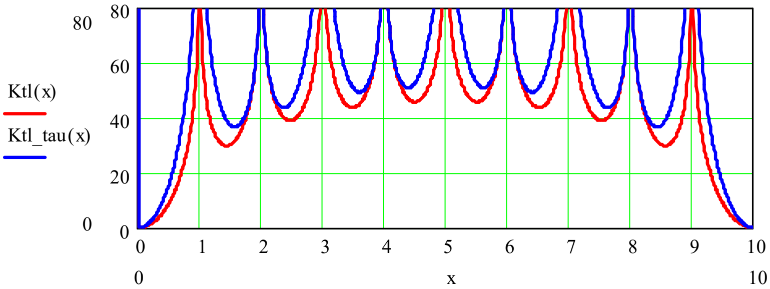
## Funkcja wagowa: 1-2-1
## dal dodatkowego tłumienia 1-ej składowej harmonicznej

Zależność błędów przy zwykłym oraz wagowym (dodatkowe tłumienie 1-ej harmonicznej) uśrednianiu (N=10)



## Funkcja wagowa: 1-2-1
## dal dodatkowego tłumienia 1-ej składowej harmonicznej

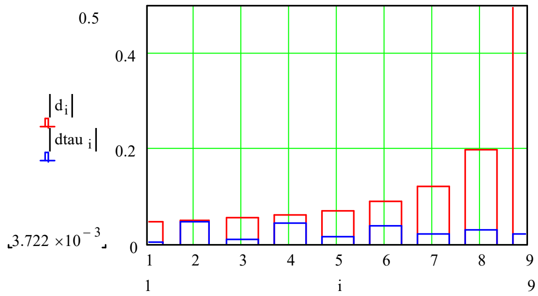
Zależność współczynnika tłumienia przy zwykłym oraz wagowym (z dodatkowym tłumieniem 1-j składowej harmonicznej) uśrednianiu (N=10, Ns=15).




Oprócz 1-je dodatkowa są tłumione 3, 5, 7 oraz 9-ta składowe harmoniczne. Tzn. nieparzyste odnośnie 1-ej składowe.

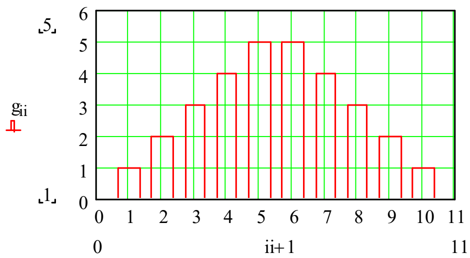
## Funkcja wagowa: 1-2-1
## dal dodatkowego tłumienia 1-ej składowej harmonicznej

Wartości błędów przy zwykłym oraz wagowym (dodatkowe tłumienie 1-ej harmonicznej) uśrednianiu (N=10, Ns=15, δf=5%)



## Funkcje wagowe zapewniające tłumienie w szerokim paśmie częstotliwości

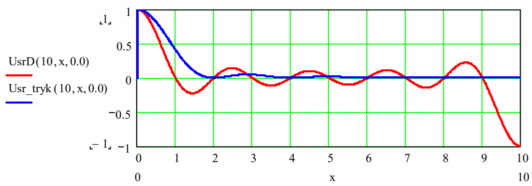
Trójkątna **funkcja wagowa N=10.**



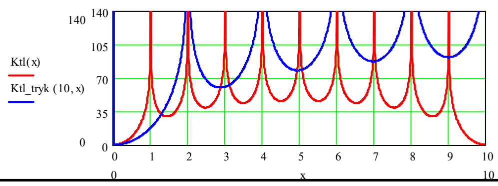

$$\mathrm{Usr\_tryk}(N,x,\delta) := \left[\frac{\frac{1}{N}\cdot\sin\left[\frac{\pi}{2}x\cdot(1+\delta)\right]}{\sin\left[\frac{\pi x\cdot(1+\delta)}{2N}\right]}\right]^2$$

## Funkcje wagowe zapewniające tłumienie w szerokim paśmie częstotliwości

Zależność wartości błędu przy zwykłym oraz wagowym (trójkątna funkcja wagowa) uśrednianiu (N=10)

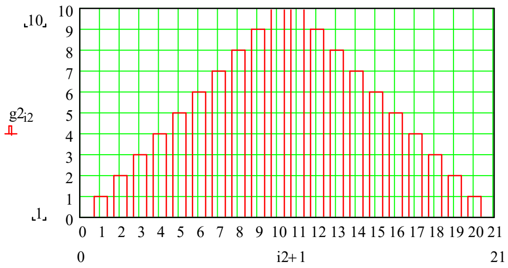



Zależność współczynnika tłumienia przy zwykłym oraz wagowym (trójkątna funkcja wagowa) uśrednianiu (N=10)



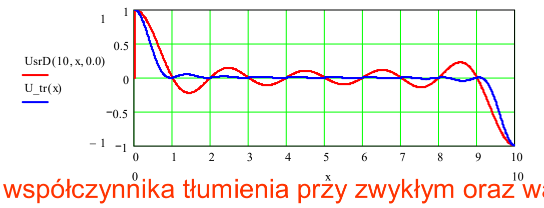
## Funkcje wagowe zapewniające tłumienie w szerokim paśmie częstotliwości

Trójkątna **funkcja wagowa N=20.**

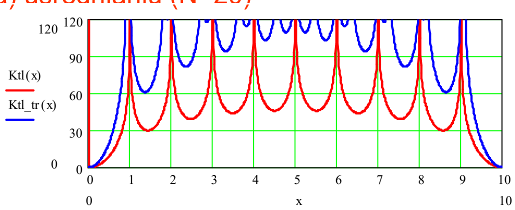



## Funkcje wagowe zapewniające tłumienie w szerokim paśmie częstotliwości

Zależność wartości błędu przy zwykłym oraz wagowym (trójkątna funkcja wagowa) uśrednianiu (N=20)

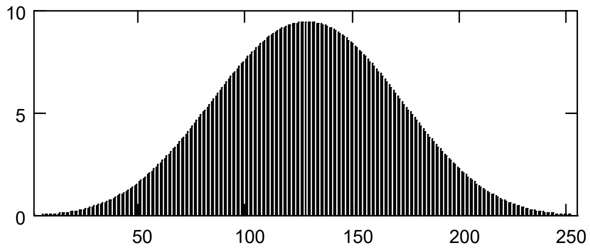



Zależność współczynnika tłumienia przy zwykłym oraz wagowym (trójkątna funkcja wagowa) uśrednianiu (N=20)



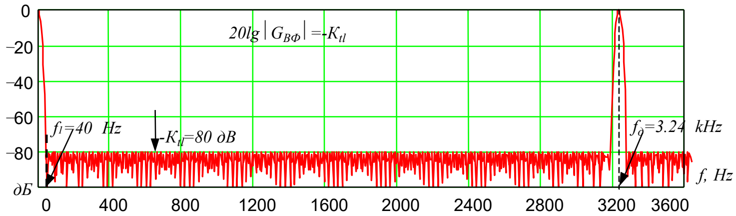
# Dolpha -Czebyszowa

- WF N=256




## Funkcja wagowa Dolpha -Czebyszowa

- WF N=256




- Częstotliwość próbkowania $f_p = N / T_{us} = f_2 + f_1$
- Czas uśredniania $T_{us} = \frac{\nu_0}{f_1} \qquad \nu_0 = f_1 T_{us} = \frac{\ln(2K_{tl})}{\pi}$
- Liczba próbek N i rząd funkcji n

$$D = f_2 / f_1 \qquad N = (D+1)\nu_0; \quad n = N - 1$$

## Funkcja Dolpha -Czebyszowa

- Przykład. Wyznaczyć

Częstotliwość próbkowania fp;

Czas uśredniania Tus sygnału

Minimalna liczbę próbek N i rząd n funkcji Dolpha-Chebysheva;

przy wyznaczaniu **wartości średniej** sygnału zmiennego w paśmie od 40 Hz do 4 kHz jeśli wymagane jest tłumienie zakłóceń 50dB.

Rozwiązanie:

1) Częstotliwość próbkowania $f_p = f_2 + f_1 = 4000Hz + 40Hz = 4040Hz$

2) Czas uśredniania Tus sygnału

$$K_{tl} = 10^{\frac{50}{20}} = 316; \quad v_0 = \frac{\ln(2K_{tl})}{\pi} = \frac{\ln(2 \cdot 316)}{\pi} \approx 2.053 \qquad T_{us} = \frac{v_0}{f_1} = \frac{2.053}{40\ Hz} \approx 51.33\ ms$$

3) Minimalna liczbę próbek N i rząd n

$$D = f_2 / f_1 = 4000Hz / 40Hz = 100$$

$$N = (D+1)v_0 = (100+1) \cdot 2.053 \approx 208; \quad n = N - 1 = 208 - 1 = 207$$

## Funkcja Dolpha -Czebyszowa

- Przykład. Wyznaczyć

Częstotliwość próbkowania fp;

Czas uśredniania Tus sygnału

Minimalna liczbę próbek N i rząd n funkcji Dolpha-Chebysheva;

przy wyznaczaniu **wartości skutecznej** sygnału zmiennego w paśmie od 20 Hz do 1 kHz jeśli wymagane jest tłumienie zakłóceń 60dB.

Rozwiązanie:

1) Częstotliwość próbkowania $f_p = 2f_2 + 2f_1 = 2 \cdot 1000Hz + 2 \cdot 20Hz = 2040Hz$

2) Czas uśredniania Tus sygnału

$$K_{tl} = 10^{\frac{60}{20}} = 1000; \quad v_0 = \frac{\ln(2K_{tl})}{\pi} = \frac{\ln(2 \cdot 1000)}{\pi} \approx 2.419 \qquad T_{us} \cong \frac{\ln(2K_{tl})}{\pi 2 f_1} = \frac{v_0}{2f_1} = \frac{2.419}{2 \cdot 20\ Hz} \approx 60.49\ ms$$

3) Minimalna liczbę próbek N i rząd n

$$D = 2f_2 / 2f_1 = 2000Hz / 40Hz = 50$$

$$N = (D+1)v_0 = (50+1) \cdot 2.419 \approx 124; \quad n = N - 1 = 124 - 1 = 123$$