

Politechnika Rzeszowska
Katedra Mechaniki Stosowanej i Robotyki

MECHANIKA TECHNICZNA 2

dr inż. Jacek S. Tutak

Rzeszów 2022

Wykład opracowany w oparciu o skrypt:

prof. dr hab. inż. Zenon Hendzel,

prof. dr hab. inż. Wiesław Żylski

„Mechanika Ogólna - DYNAMIKA”

A) Energia kinetyczna

a) Energia kinetyczna punktu materialnego

Wielkość określoną w następujący sposób:

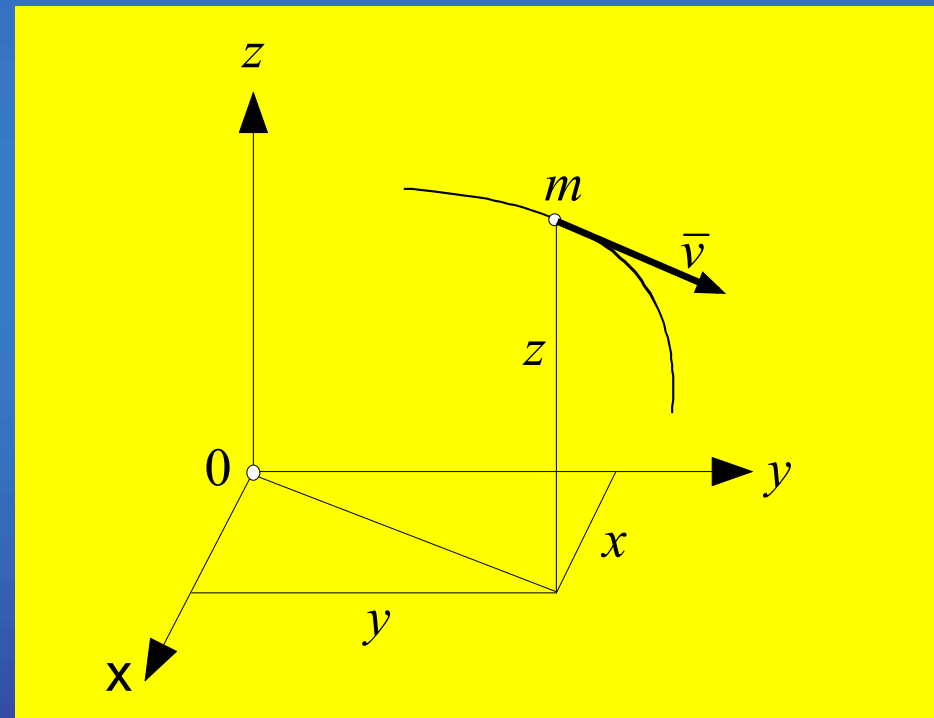
$$E = \frac{1}{2}mv^2$$

nazywamy energią kinetyczną układu zwaną inaczej energią ruchu.

We wzorze tym wyróżniamy:

m - masa punktu materialnego,

v - prędkość liniowa punktu materialnego.



Rys.1

Jeżeli opisujemy ruch punktu w układzie odniesienia xyz, to prędkość wyrazimy następująco:

$$v^2 = (\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2$$

energia kinetyczna wyrazi się wówczas:

$$E = \frac{1}{2} m [(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2]$$

Energia kinetyczna jest wielkością skalarną, zawsze dodatnią. Jednostką energii kinetycznej jest:

$$E \left[kg \frac{m^2}{s^2} \right] = [N \cdot m]$$

Zróżniczkujemy równanie na energię kinetyczną po czasie:

$$\frac{dE}{dt} = m(\dot{x} \cdot \ddot{x} + \dot{y} \cdot \ddot{y} + \dot{z} \cdot \ddot{z})$$

$$\frac{dE}{dt} = m(\dot{x} \cdot \ddot{x} + \dot{y} \cdot \ddot{y} + \dot{z} \cdot \ddot{z})$$

Powyższe równanie określające jak w czasie zmienia się energia kinetyczna punktu materialnego,

jeżeli $\dot{E} > 0$ energia kinetyczna rośnie,

jeżeli $\dot{E} < 0$ energia kinetyczna maleje,

jeżeli $\dot{E} = 0$ energia kinetyczna jest stała.

b) Energia kinetyczna bryły

- ruch postępowy bryły,

Energia kinetyczna bryły jest równa algebraicznej sumie energii punktów należących do bryły, co zapiszemy:

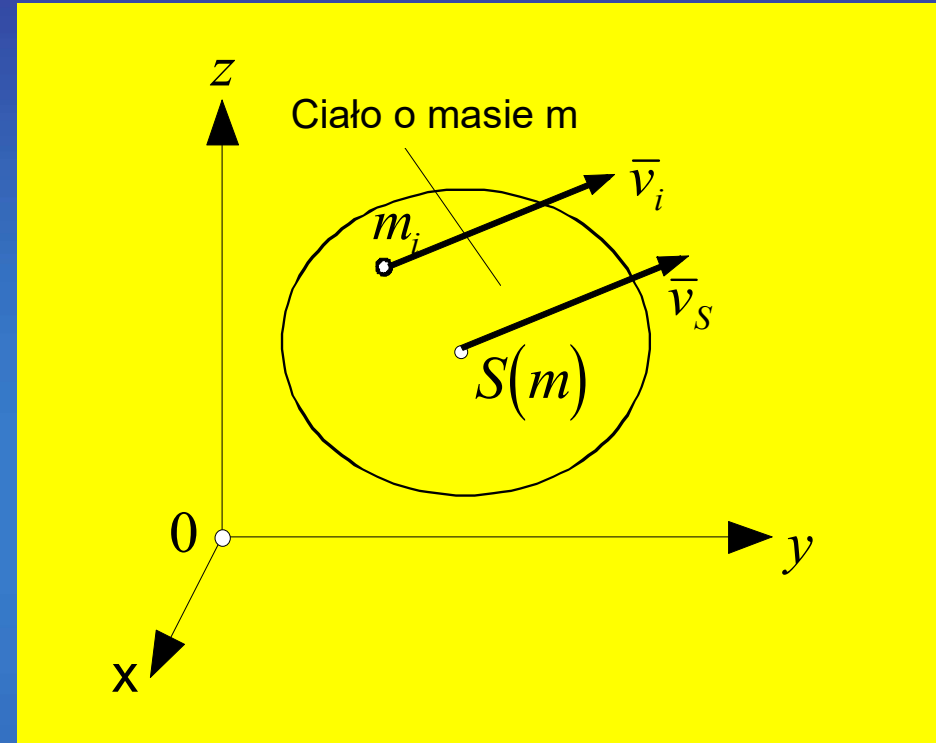
$$E = \sum_{i=1}^n E_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot v_i^2$$

W przypadku ruchu postępowego prędkość każdego punktu bryły jest równa prędkości środka masy, czyli:

$$v_i = v_S$$

Energia kinetyczna bryły w ruchu postępowym wynosi więc:

$$E = \frac{1}{2} v_S^2 \cdot \sum_{i=1}^n m_i = \frac{1}{2} m \cdot v_S^2$$



Rys. 2

Czyli, Energia kinetyczna bryły w ruchu postępowym wynosi :

$$E^{(P)} = \frac{1}{2} m \cdot v_S^2$$

m – masa całkowita bryły.

v_S – prędkość środka masy bryły.

- ruch obrotowy bryły,

Energia kinetyczna bryły w ruchu obrotowym wynosi:

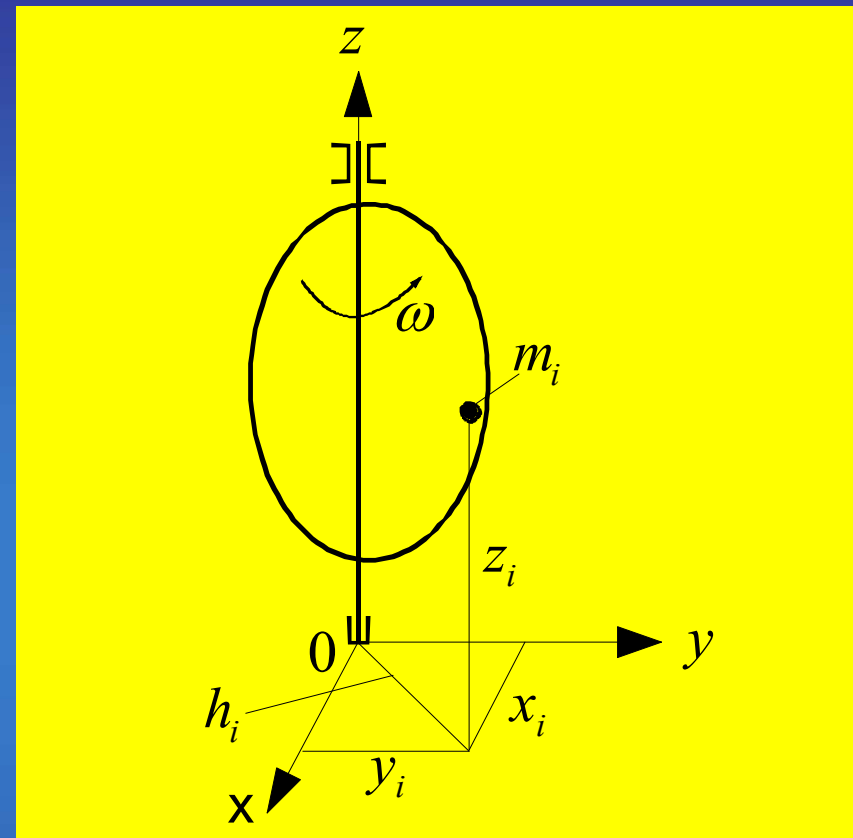
$$E = \sum_{i=1}^n E_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot v_i^2$$

prędkość liniowa punktu należącego do bryły wynosi:

$$v_i = \omega \cdot h_i = \omega \cdot \sqrt{(x_i)^2 + (y_i)^2}$$

co po podstawieniu daje:

$$E = \frac{1}{2} \omega^2 \cdot \sum_{i=1}^n m_i \cdot (x_i^2 + y_i^2) = \frac{1}{2} I_z \cdot \omega^2$$



Rys.3

Energia kinetyczna ruchu obrotowego wynosi więc:

$$E^{(o)} = \frac{1}{2} I_z \cdot \omega^2$$

I_z – moment bezwładności bryły względem osi obrotu z

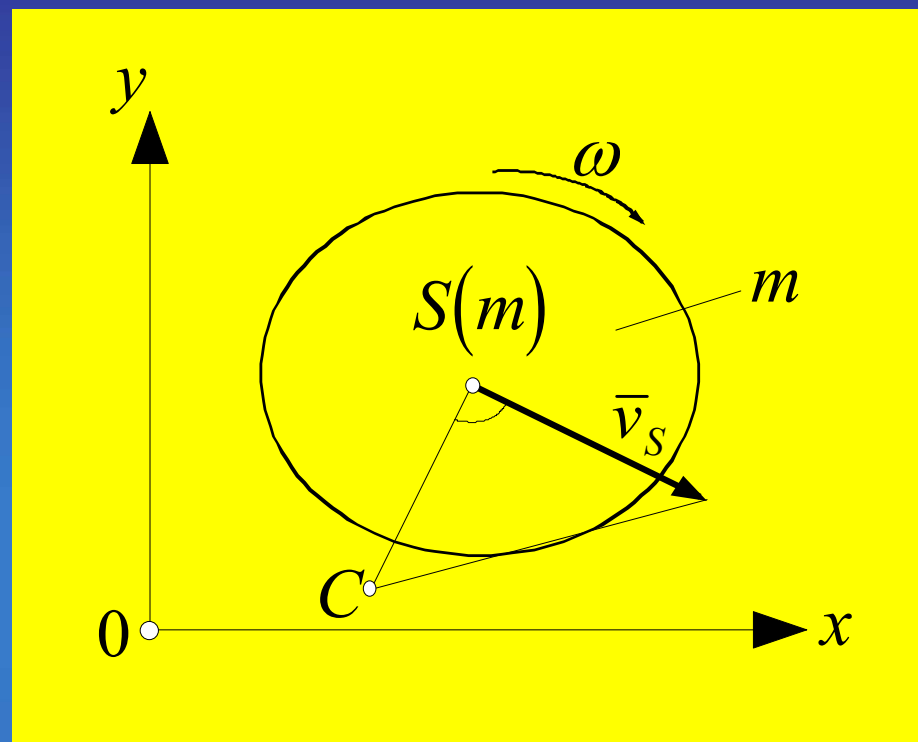
ω – prędkość kątowna bryły w ruchu obrotowym

- ruch płaski bryły,

Energia kinetyczna w ruchu płaskim jest równa sumie energii ruchu postępowego środka masy i ruchu obrotowego względem środka masy bryły:

$$E^{(pl)} = E^{(P)} + E^{(O)}$$

$$E^{(pl)} = \frac{1}{2} m \cdot v_S^2 + \frac{1}{2} I_S \cdot \omega^2$$



Rys. 4

Powyższy wzór nazywamy twierdzeniem Koeniga. Jeżeli znamy środek chwilowego obrotu bryły to jej energię możemy wyrazić jako energię ruchu obrotowego wokół chwilowego środka obrotu, czyli:

$$E^{(pl)} = E^{(C.O)} = \frac{1}{2} I_C \cdot \omega^2$$

I_C – moment bezwładności bryły względem chwilowego środka obrotu,

ω – prędkość kątowa bryły w ruchu płaskim.

c) Energia kinetyczna układu brył

Energię kinetyczną układu brył (np. układ mechaniczny) określamy jako suma algebraiczna energii kinetycznej poszczególnych brył.

$$E = \sum_{i=1}^n E_i$$

Dziękuję