Politechnika Rzeszowska

Katedra Mechaniki Stosowanej i Robotyki

MECHANIKA TECHNICZNA 2

dr inż. Jacek S. Tutak

Rzeszów 2022

Wykład opracowany w oparciu o skrypt:

prof. dr hab. inż. Zenon Hendzel, prof. dr hab. inż. Wiesław Żylski

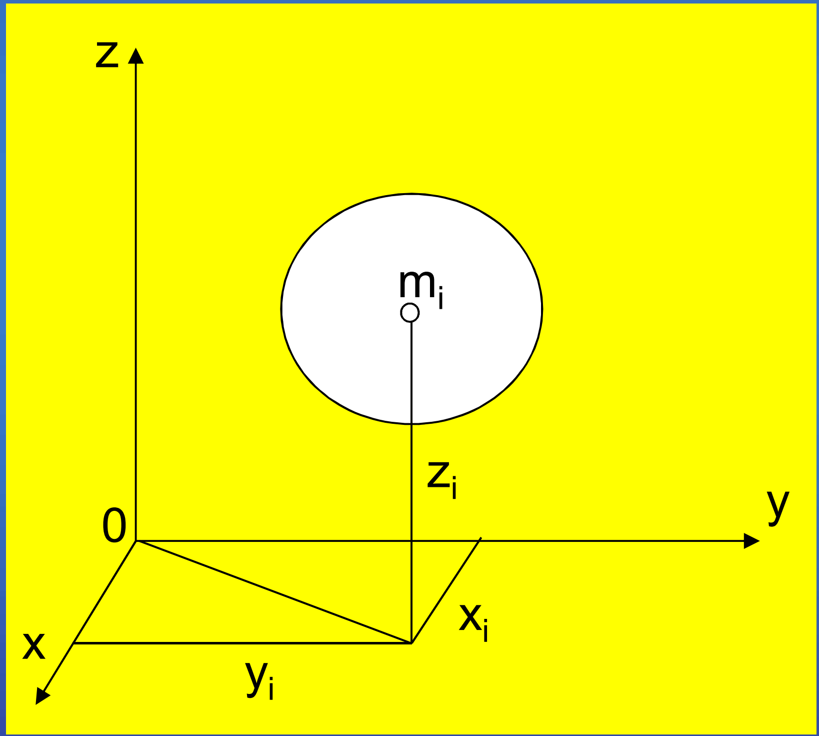
„Mechanika Ogólna - DYNAMIKA”

Geometria mas

Okazuje się, że sposób rozmieszczenia masy względem przyjętego układu odniesienia jest ważnym problemem w dynamice. Informacje o sposobie rozmieszczenia masy w układzie odniesienia, wynikają z podania poniższych wielkości.

a) Masowe momenty statyczne.

$$\begin{cases} S_{yz} = m \cdot x_S = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i = S_{zy} \\ S_{xz} = m \cdot y_S = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot y_i = S_{zx} \\ S_{xy} = m \cdot z_S = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot z_i = S_{yx} \end{cases} \qquad (2.33)$$



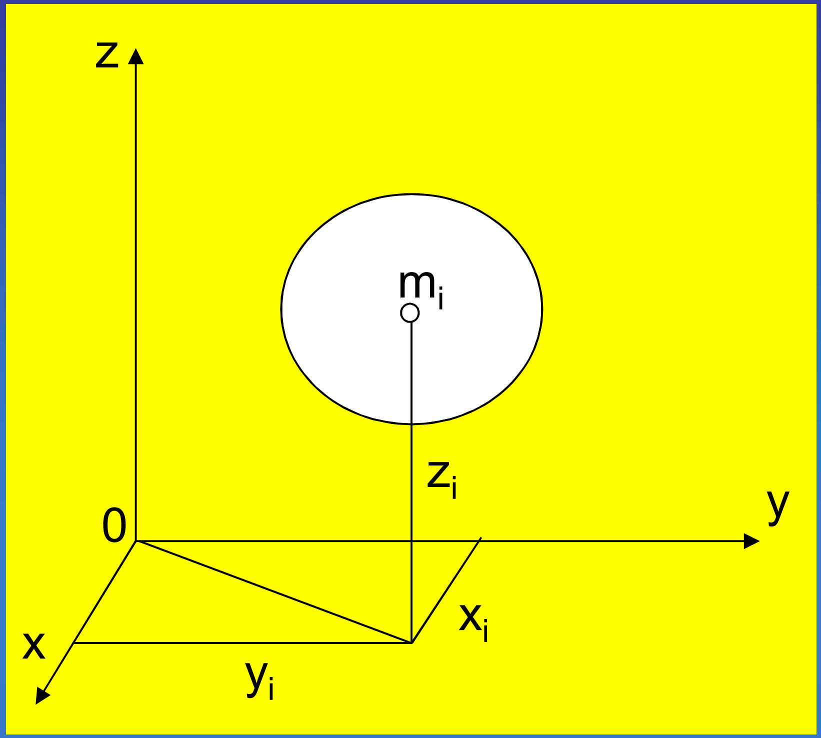
Rys. 2.9

(2.33) to wielkości skalarne zwane masowymi momentami statycznymi. Mogą być (+) (-), lub zero.

Podają pewną informację dotyczącą rozmieszczenia mas względem odpowiednich płaszczyzn.

b) Masowe momenty bezwładności.

$$\begin{cases} I_x = \sum_{i=1}^{n} m_i\left(y_i^2 + z_i^2\right) \\ I_y = \sum_{i=1}^{n} m_i\left(x_i^2 + z_i^2\right) \\ I_z = \sum_{i=1}^{n} m_i\left(x_i^2 + y_i^2\right) \end{cases} \qquad (2.34)$$



Rys. 2.10

(2.34) to wielkości skalarne zwane masowymi momentami bezwładności, określonymi względem odpowiednich osi układu odniesienia.

Wielkości te przyjmują zawsze wartości dodatnie. W pewien sposób podają informację o rozmieszczeniu masy w układzie odniesienia.

Można również określić masowy moment bezwładności względem bieguna.

$$I_0 = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2\right) \qquad (2.35)$$

Często wprowadza się pojęcie tzw. **promieni bezwładności:**

$$I_x = m \cdot i_x^2 \qquad I_y = m \cdot i_y^2$$

$$I_z = m \cdot i_z^2 \qquad I_0 = m \cdot i_0^2$$

$$\begin{cases} i_x = \sqrt{\dfrac{I_x}{m}} \\ i_y = \sqrt{\dfrac{I_y}{m}} \\ i_z = \sqrt{\dfrac{I_z}{m}} \end{cases} \qquad (2.36)$$

(2.36) to tzw. promienie (ramiona) bezwładności.

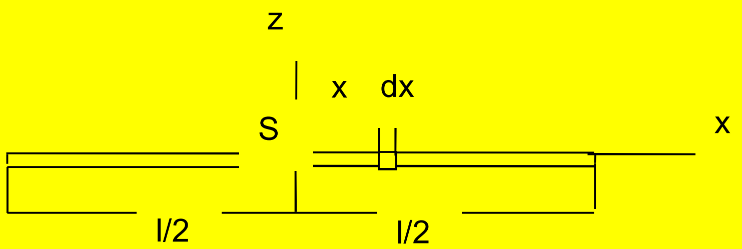
Określimy masowy moment bezwładności jednorodnego cienkiego pręta względem osi symetrii z. Masa pręta wynosi *m* a jego długość *l*. Wymiary poprzeczne pręta są bardzo małe w stosunku do jego długości tak, że możemy je pominąć.

Wycinamy myślowo w odległości x od osi z element o długości dx, co pokazano na rysunku (2.11). Masa elementu o długości dx wynosi $dm = dx\rho$, gdzie ρ jest masą właściwą pręta, czyli

$$\rho = \frac{m}{l}$$

zatem

$$dm = \frac{m}{l}dx$$

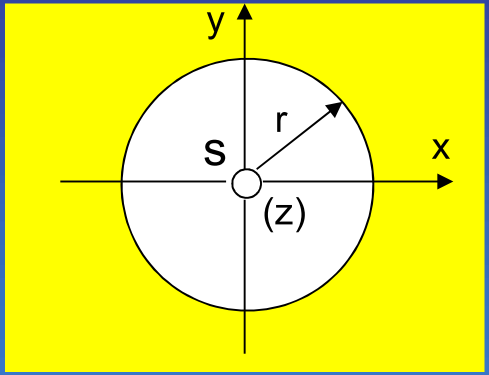
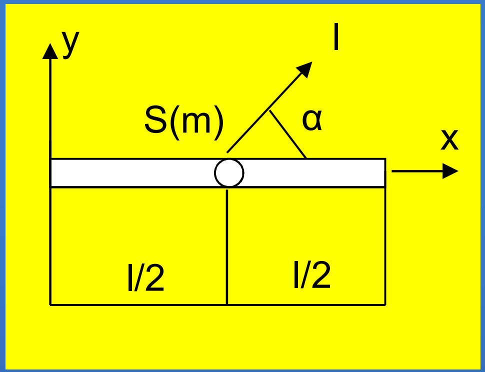
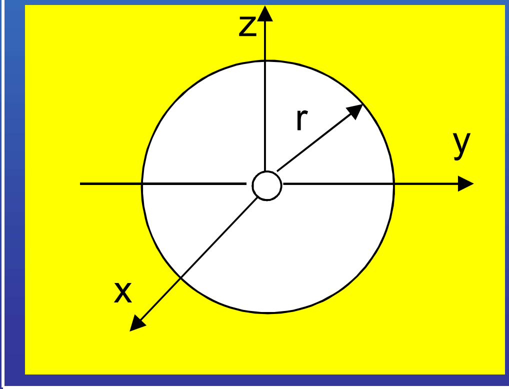


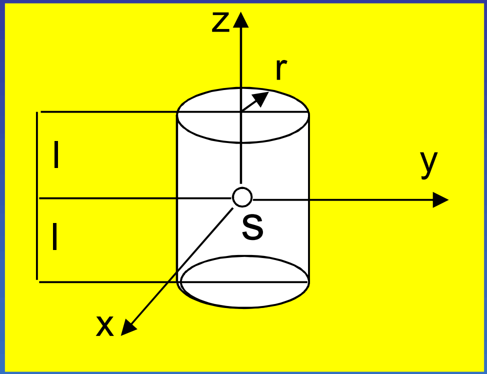
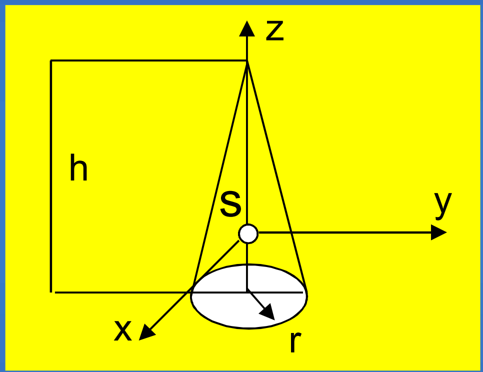
Rys. 2.11

Wówczas masowy moment bezwładności pręta wynosi

$$I_Z = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + y_i^2) = \int_{(m)} dm_i x_i^2 = \int_{-l/2}^{l/2} \rho x^2 dx = \frac{m}{l}\int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx = \frac{ml^2}{12}$$

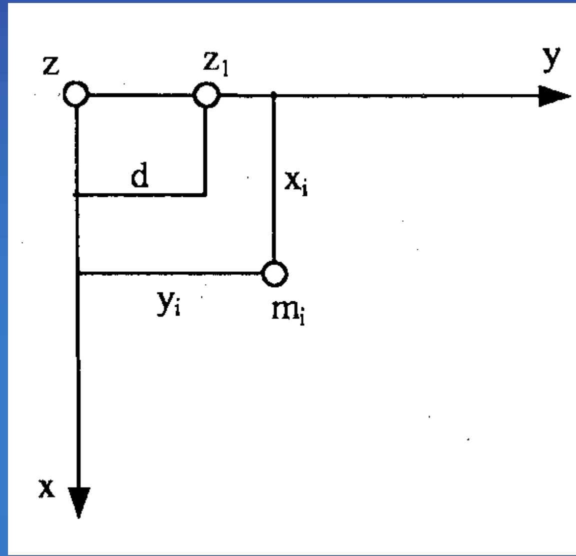
Poniżej podano jak określamy masowe momenty bezwładności najczęściej stosowanych układów.

	Jednorodna płyta płaska o kształcie kołowym i masie m.	$I_x = I_y = \frac{m \cdot r^2}{4}$ $I_z = \frac{m \cdot r^2}{2}$
	Jednorodny pręt o masie m i długości l.	$I_l = \frac{m \cdot l^2}{12} \cdot \sin^2(\alpha)$ $I_y = \frac{m \cdot l^2}{3}$
	Jednorodna kula o masie m.	$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{3} \cdot m \cdot r^2$

	Jednorodny walec kołowy o masie m.	$I_x = I_y = m \cdot \left(\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{3} \right)$ $I_z = \frac{m \cdot r^2}{2}$
	Jednorodny stożek o masie m.	$I_x = I_y = \frac{3}{5} \cdot m \cdot \left(h^2 + \frac{r^2}{4} \right)$ $I_z = \frac{3}{10} \cdot m \cdot r^2$

Masowe momenty bezwładności względem osi równoległych

$$I_{z1} = I_z + m \cdot d^2$$



Równanie (112) to tzw. twierdzenie *Stainera*. Wynika z niego, że moment bezwładności ciała materialnego względem dowolnej osi jest równy sumie momentów bezwładności ciała względem osi równoległej przechodzącej przez środek masy oraz iloczynowi masy ciała i kwadratu odległości między tymi dwiema osiami. Z tego twierdzenia wynika również, że najmniejszy masowy moment bezwładności ciała materialnego otrzymamy względem osi przechodzącej przez środek masy ciała.

Dziękuję