Politechnika Rzeszowska

Katedra Mechaniki Stosowanej i Robotyki

MECHANIKA TECHNICZNA 2

dr inż. Jacek S. Tutak

Rzeszów 2022

Wykład opracowany w oparciu o skrypt:

prof. dr hab. inż. Zenon Hendzel, prof. dr hab. inż. Wiesław Żylski

„Mechanika Ogólna - DYNAMIKA”

2. Dynamika układu punktów materialnych

Aby zbiór punktów materialnych tworzył układ materialny, należy ruch każdego punktu uzależnić od ruchu pozostałych punktów. Rozróżnia się układy swobodne i nieswobodne.

Układ, którego punkty nie mogą zajmować dowolnych położeń i mieć dowolnych prędkości niezależnie od działających sił, nazywamy układem nieswobodnym.

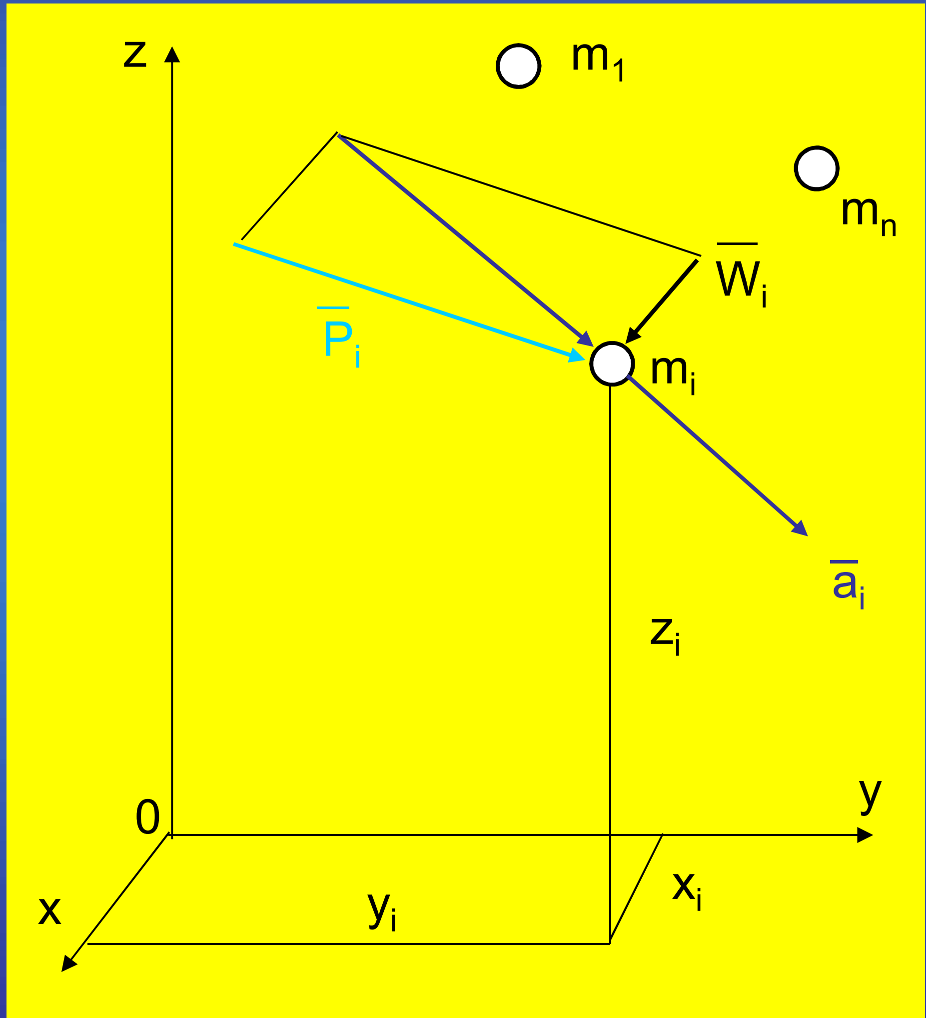
Badając ruch układu materialnego opieramy się na prawach Newtona, które należy zastosować do każdego punktu układu.

Siły działające na punkty układu materialnego możemy podzielić na siły **wewnętrzne i siły zewnętrzne.**

$(m_1 \ldots m_n)$ – zbiór punktów materialnych, zwany układem punktów materialnych

Siły wewnętrzne $\left(\overline{W}_i\right)$ to siły pochodzące od wzajemnego oddziaływania punktów materialnych wchodzących w skład układu.

Siły zewnętrzne $\left(\overline{P}_i\right)$ to wszystkie inne siły działające na dany punkt.



Rys.2.1

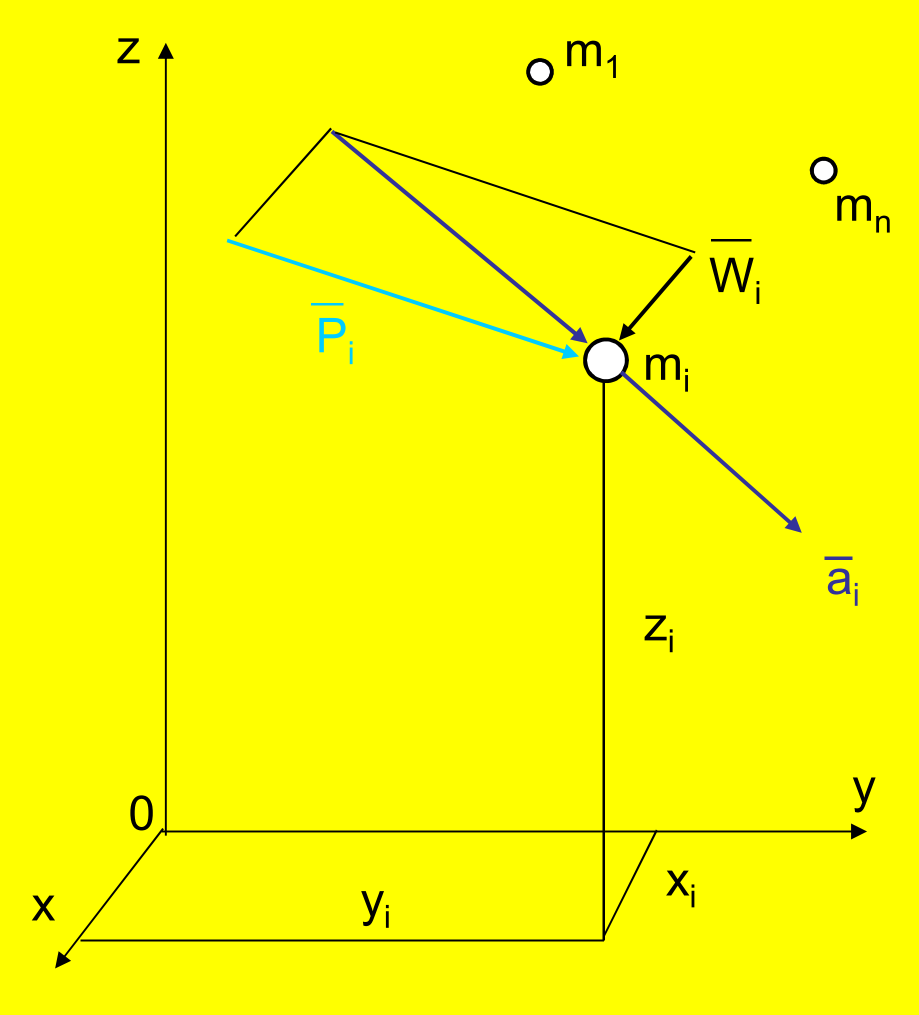
Równanie wektorowe opisujące ruch i - tego punktu materialnego w układzie punktów materialnych, przy uwzględnieniu prawa Newtona można zapisać:

$$m_i \cdot \overline{a}_i = \overline{P}_i + \overline{W}_i \qquad (2.1)$$

Jeżeli (2.1) zrzutujemy na osie układu odniesienia xyz (rys. 2.1) to otrzymamy:

$$\begin{cases} m_i \cdot \ddot{x}_i = P_{ix} + W_{ix} \\ m_i \cdot \ddot{y}_i = P_{iy} + W_{iy} \\ m_i \cdot \ddot{z}_i = P_{iz} + W_{iz} \end{cases} \qquad (2.2)$$

(2.2) są to różniczkowe równania ruchu i - tego punktu materialnego.



Rys.2.1

Z powyższych rozważań wynika, że opisywanie ruchu każdego punktu przy pomocy różniczkowych równań ruchu prowadzi do bardzo dużej ilości równań.

Aby opisać w możliwie najprostszy sposób ruch układu punktów materialnych, wprowadzimy pewne pojęcia.

Środek masy układu

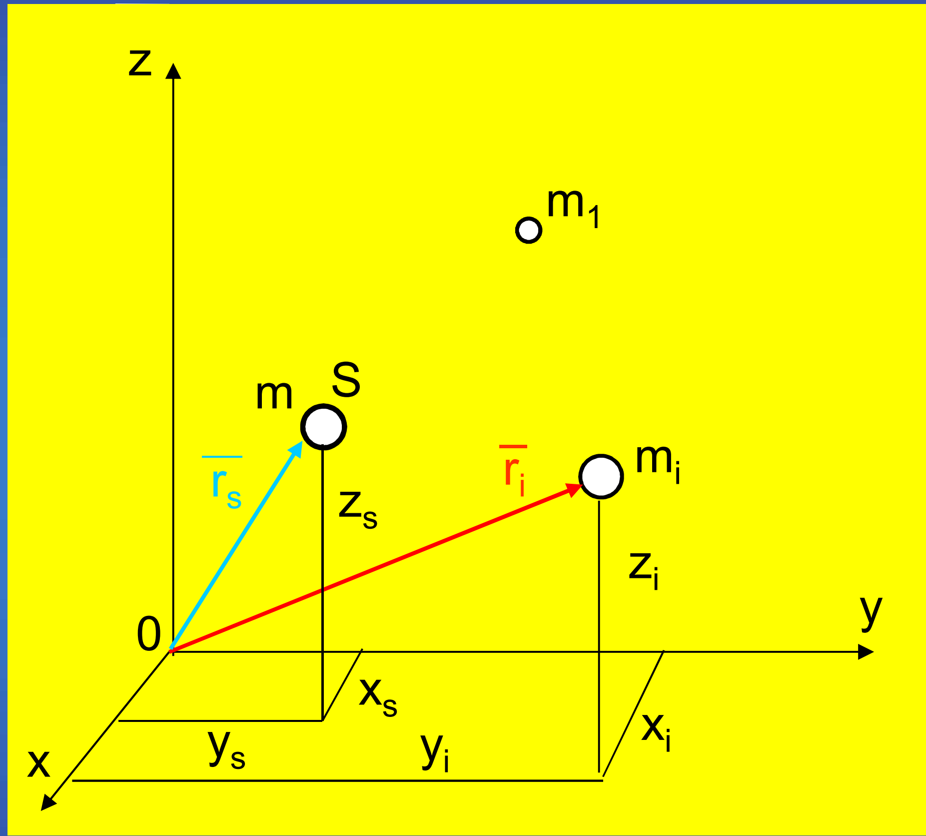
Rozważamy układ złożony z n - punktów materialnych.

Położenie punktu i o masie m_i określa wektor r_i (rys. 2.2).

Punkt S, w którym umieszczamy całkowitą masę układu, a którego położenie opisuje równanie wektorowe:

$$m \cdot \bar{r}_S = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \bar{r}_i \qquad (2.3)$$

nazywamy środkiem masy układu.



Rys. 2.2

$m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ – masa całkowita układu, $m \cdot r_S$ – moment statyczny układu.

Współrzędne środka masy określimy z równań wynikających z rzutu równania (2.3) na osie xyz układu odniesienia.

$$\begin{cases} m \cdot x_S = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i \\ m \cdot y_S = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot y_i \\ m \cdot z_S = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot z_i \end{cases} \qquad (2.4)$$

W warunkach ziemskich środek masy to ten sam punkt co środek ciężkości

Wektor pędu środka masy

Rozważmy układ punktów materialnych, którego środek masy znamy.

Równanie (2.3) tego układu różniczkujemy względem czasu:

$$m \cdot \dot{\bar{r}}_S = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \dot{\bar{r}}_i$$

W równaniu tym

$$\dot{\bar{r}}_S = \bar{v}_S$$

$$\dot{\bar{r}}_i = \bar{v}_i$$

czyli

$$m \cdot \bar{v}_S = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \bar{v}_i \qquad (2.5)$$

gdzie:

$m \cdot \bar{v}_S$ – **wektor pędu środka masy,**

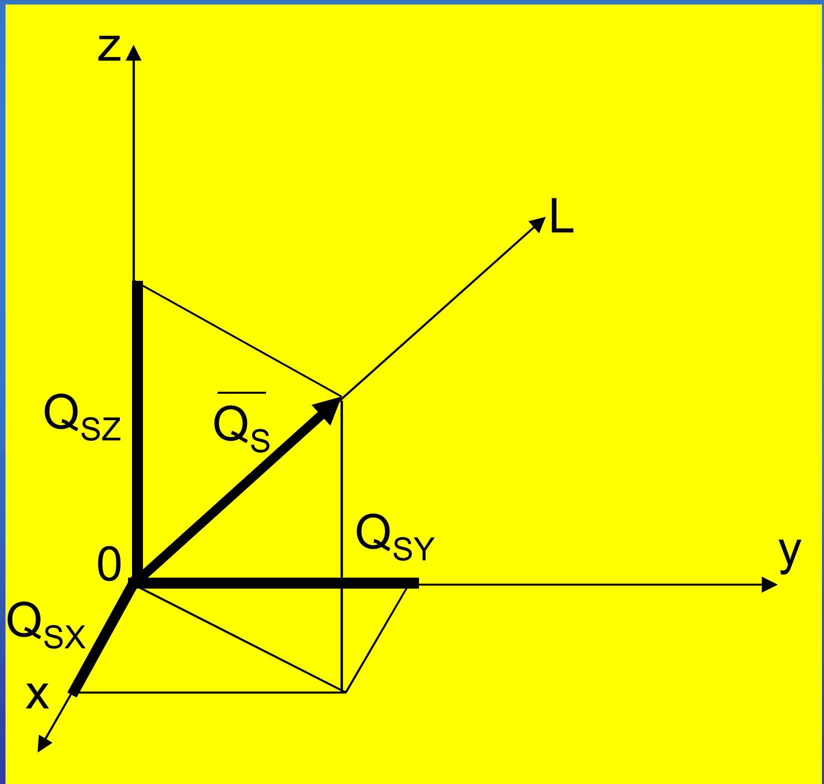
$\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \bar{v}_i$ – **wektor pędu układu punktów materialnych.**

Z (2.5) wynika, że wektor pędu układu punktów materialnych równy jest wektorowi pędu środka masy. Równanie (2.5) rzutujemy na osie xyz układu odniesienia i dostajemy:

$$\begin{cases} m \cdot \dot{x}_S = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \dot{x}_i \\ m \cdot \dot{y}_S = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \dot{y}_i \\ m \cdot \dot{z}_S = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \dot{z}_i \end{cases} \qquad (2.6)$$

(2.6) to rzuty wektora pędu środka masy na poszczególne osie układu odniesienia. Wektor pędu można zapisać:

$$\overline{Q}_S = m \cdot \overline{v}_S = Q_{Sx} \cdot \overline{i} + Q_{Sy} \cdot \overline{j} + Q_{Sz} \cdot \overline{k} \qquad (2.7)$$



Rys.2.4

Wartość wektora pędu środka masy wyznaczymy z wzoru:

$$Q_S = \sqrt{\left(Q_{Sx}\right)^2 + \left(Q_{Sy}\right)^2 + \left(Q_{Sz}\right)^2} \tag{2.8}$$

gdzie:

$$\begin{cases} Q_{Sx} = m \cdot \dot{x}_S = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \dot{x}_i \\ Q_{Sy} = m \cdot \dot{y}_S = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \dot{y}_i \\ Q_{Sz} = m \cdot \dot{z}_S = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \dot{z}_i \end{cases} \tag{2.9}$$

W układzie SI jednostką pędu jest $1\left[kg \cdot \frac{m}{s}\right]$

Przykład

Równanie ruchu środka masy

Zróżniczkujmy równanie (2.5) względem czasu. Otrzymujemy:

$$m \cdot \dot{\overline{v}}_S = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \dot{\overline{v}}_i$$

W równaniu tym $\begin{cases} \dot{\overline{v}}_S = \overline{a}_S \\ \dot{\overline{v}}_i = \overline{a}_i \end{cases}$ co pozwala nam zapisać powyższe równanie

w postaci:

$$m \cdot \overline{a}_S = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \overline{a}_i \qquad (2.10)$$

ponieważ równanie (2.1) mówi $m_i \cdot \overline{a}_i = \overline{P}_i + \overline{W}_i$, to po wstawieniu do (2.10) dostaniemy:

$$m \cdot \overline{a}_S = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \overline{a}_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i + \sum_{i=1}^{n} \overline{W}_i$$

Wektor $\sum_{i=1}^{n} \overline{W_i}$, jest sumą sił wewnętrznych układu (wzajemnego oddziaływania punktów materialnych), która wynosi zero. Równanie powyższe będzie miało postać:

$$m \cdot \overline{a}_S = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \overline{a}_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i \qquad (2.11)$$

Równanie (2.11) **to równanie wektorowe opisujące zjawisko ruchu środka masy układu.**

Wynika z niego, **że ruch środka masy całego układu powodować mogą tylko siły zewnętrzne układu.**

Siły wewnętrzne mogą zmienić ruch środka masy tylko części układu, ale nie całości.

Rzutując (2.11) na osie układu odniesienia, mamy:

$$\begin{cases} m \cdot \ddot{x}_S = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \ddot{x}_i = \sum_{i=1}^{n} P_{ix} \\ m \cdot \ddot{y}_S = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \ddot{y}_i = \sum_{i=1}^{n} P_{iy} \\ m \cdot \ddot{z}_S = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \ddot{z}_i = \sum_{i=1}^{n} P_{iz} \end{cases} \qquad (2.12)$$

(2.12) **to różniczkowe równania ruchu środka masy układu.**

Przykład

Dziękuję