Politechnika Rzeszowska

Katedra Mechaniki Stosowanej i Robotyki

MECHANIKA TECHNICZNA 2

dr inż. Jacek S. Tutak

Rzeszów 2022

Wykład opracowany w oparciu o skrypt:

prof. dr hab. inż. Zenon Hendzel, prof. dr hab. inż. Wiesław Żylski

„Mechanika Ogólna - DYNAMIKA”

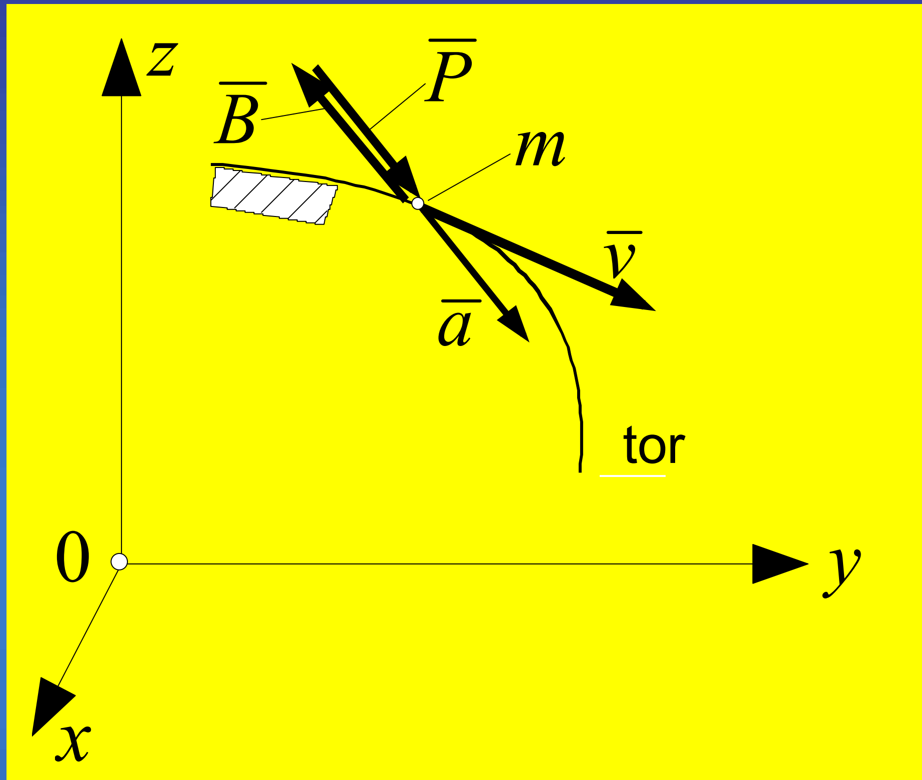
Zasada równowagi kinetostatycznej.

Równanie ruchu dla dowolnego punktu o masie m poruszającego się po torze (rys.5.12) ma postać:

$$m \cdot \overline{a} = \overline{P}$$

gdzie:

$$\overline{P} = \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i \rightarrow$$ wypadkowa sił działających na punkt.



Rys. 5.12

Równaniu ruchu możemy nadać prostszą postać przenosząc wszystkie wyrazy na jedną stronę. Otrzymamy wówczas:

$$\overline{P} + \left(-m \cdot \overline{a}\right) = 0$$

Oznaczmy odpowiednio:

$\overline{B} = -m \cdot \overline{a} \rightarrow$ tzw. siła bezwładności (siła fikcyjna),

$B = m \cdot a \rightarrow$ wartość siły bezwładności.

Zapiszemy, więc odpowiednio:

$$\overline{P} + \overline{B} = 0 \qquad (5.11)$$

(5.11) to tzw. zasada równowartości kinetostatycznej opisującej ruch punktu materialnego (Zasada d'Alamberta).

Z równania (5.11) wynika, że w każdej chwili suma geometryczna sił prawdziwych działających na punkt materialny ($\overline{P}$) oraz sił bezwładności ($\overline{B}$) jest zerem.

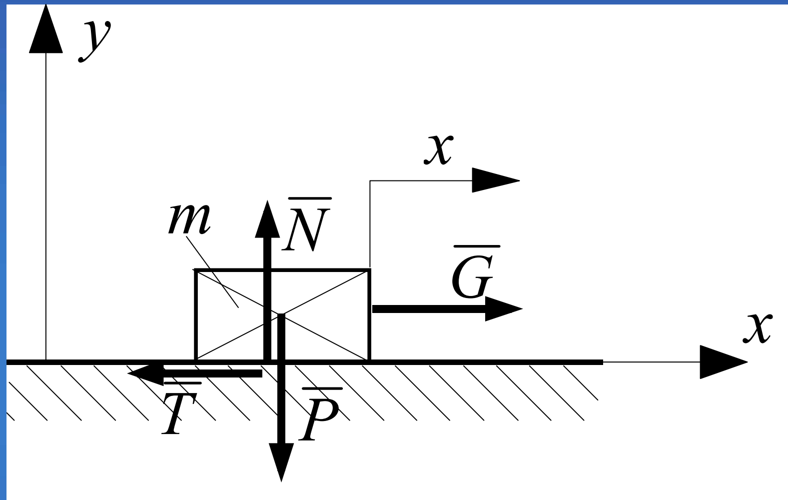
Przechodząc z równania (5.11) na zapis skalarny:

$$\begin{cases} P_x + B_x = 0 \\ P_y + B_y = 0 \\ P_z + B_z = 0 \end{cases} \tag{5.12}$$

Wprowadzamy zatem wszystkie siły prawdziwe działajace na punkt materialny, dodając do tych sił siły fikcyjne i uważamy , że wówczas ten układ sił pozostaje w równowadze statycznej, ale ponieważ odbywa się ruch, to równowagę tę nazywamy kinetostatyczna.

Zasadą równowagi kinetostatycznej można opisywać zjawisko ruchu punktu materialnego, bryły lub układu brył.

Przykład.
Opisujemy zjawisko ruchu masy poruszającej się po płaskiej chropowatej powierzchni.



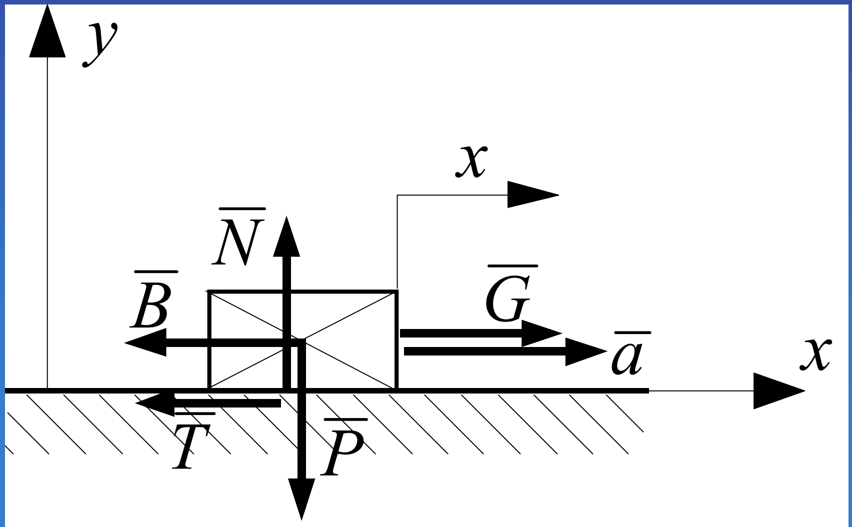
Rys. 5.13

Zgodnie z przyjętym układem odniesienia równania ruchu będą miały postać:

,

$$\begin{cases} m \cdot \ddot{x} = G - T \\ m \cdot \ddot{y} = 0 = N - P \end{cases}$$

stosując zasadę równowagi kinetostatycznej będziemy mieli:



Rys. 5.14

$$\begin{cases} P_x + B_x = 0 \\ P_y + B_y = 0 \\ P_z + B_z = 0 \end{cases} \qquad (5.12)$$

$$\begin{cases} -B - T + G = 0 \\ -P + N = 0 \end{cases}$$

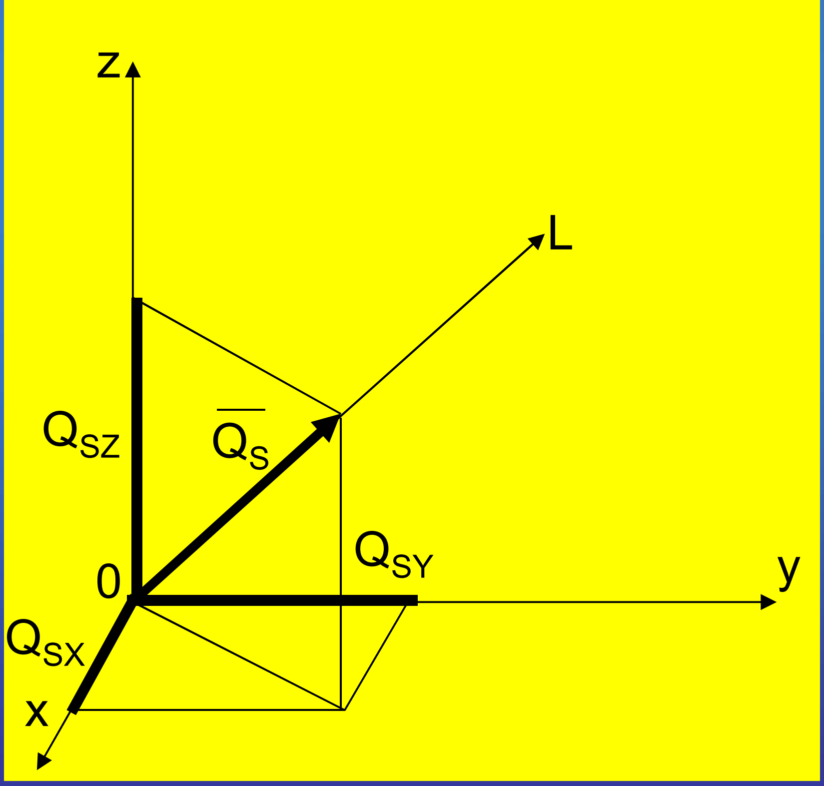
Wektor pędu i popędu układu sił

Wektor pędu punktu s pokazany na rys 2.4 można zapisać jako:

$$\overline{Q}_S = m \cdot \overline{v}_S = Q_{Sx} \cdot \overline{i} + Q_{Sy} \cdot \overline{j} + Q_{Sz} \cdot \overline{k} \qquad (2.7)$$

Wartość wektora pędu masy wyznaczymy z wzoru:

$$Q_S = \sqrt{\left(Q_{Sx}\right)^2 + \left(Q_{Sy}\right)^2 + \left(Q_{Sz}\right)^2} \qquad (2.8)$$



Rys.2.4

gdzie

$$\begin{cases} Q_{Sx} = m \cdot \dot{x}_S \\ Q_{Sy} = m \cdot \dot{y}_S \\ Q_{Sz} = m \cdot \dot{z}_S \end{cases} \qquad (2.9)$$

W układzie SI jednostką pędu jest

$$1\left[kg \cdot \frac{m}{s}\right]$$

Wektor popędu (impulsu) sił

Weźmy pod uwagę punkt s którego równania ruchu są następujące

$$m \cdot \overline{a}_S = \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i \qquad (2.10)$$

Traktując przyspieszenie jako pierwszą pochodną wektora prędkości, tzn.:

$$\overline{a}_S = \frac{d\overline{v}_S}{dt} \qquad (2.11)$$

równanie (2.10) przyjmie teraz następującą postać:

$$m \frac{d\overline{v}_S}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i \qquad (2.12)$$

po pomnożeniu przez dt będzie:

$$m d\overline{v}_s = \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i dt \qquad (2.13)$$

gdzie:

$m \cdot d\overline{v}_S$ - elementarny wektor pędu środka masy,

$\overline{P}_i \cdot dt$ - elementarny wektor popędu (impulsu) wszystkich sił zewnętrznych.

Jeżeli teraz scałkujemy obustronnie równanie (2.13) czyli:

$$\int_{\overline{v}_S^{(0)}}^{\overline{v}_S^{(t)}} m \cdot d\overline{v}_S = \int_0^t \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i \cdot dt \qquad (2.14)$$

i po scałkowaniu dostajemy:

$$m \cdot \left(\overline{v}_S^{(1)} - \overline{v}_S^{(0)} \right) = \overline{S}$$

gdzie:

$m \cdot \overline{v}_S^{(1)} = \overline{Q}_S^{(1)}$ Wektor pędu w czasie t [s]

$m \cdot \overline{v}_S^{(0)} = \overline{Q}_S^{(0)}$ Wektor pędu w czasie to [s]

$$\overline{S} = \int_0^t \sum_{i=1}^n \overline{P}_i \cdot dt$$

- tzw. wektor popędu (impulsu) wszystkich sił zewnętrznych.

Równanie (2.14) po uwzględnieniu powyższego możemy napisać w postaci:

$$\overline{Q}_S^{(1)} - \overline{Q}_S^{(0)} = \overline{S} \tag{2.15}$$

W równaniu (2.15) mamy:

$\overline{Q}_S^{(1)} - \overline{Q}_S^{(0)}$ - przyrost wektora pędu

$\overline{S}$ - wektor popędu sił zewnętrznych.

Równanie (2.15) rzutujemy na osie przyjętego układu odniesienia i dostajemy:

$$\begin{cases} m \cdot \dot{x}_S^{(t)} - m \cdot \dot{x}_S^{(0)} = Q_x^{(t)} - Q_x^{(0)} = S_x = \int_0^t \sum_{i=1}^n P_{ix} \cdot dt \\ m \cdot \dot{y}_S^{(t)} - m \cdot \dot{y}_S^{(0)} = Q_y^{(t)} - Q_y^{(0)} = S_y = \int_0^t \sum_{i=1}^n P_{iy} \cdot dt \\ m \cdot \dot{z}_S^{(t)} - m \cdot \dot{z}_S^{(0)} = Q_z^{(t)} - Q_z^{(0)} = S_z = \int_0^t \sum_{i=1}^n P_{iz} \cdot dt \end{cases} \qquad (2.16)$$

Równania (2.16) określają zmianę pędu punktu w czasie, na odpowiednim kierunku.

Jednostką impulsu w układzie SI jest $1\left[N \cdot s\right]$

Jeżeli zdarzyłoby się tak, iż impuls sił zewnętrznych wynosiłby:

$$\overline{S} = \int_{0}^{t} \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i \cdot dt = 0$$

to wówczas:

$$m \cdot \overline{v}_S^{(1)} - m \cdot \overline{v}_S^{(0)} = 0$$

Czyli:

$$m \cdot \overline{v}_S = \overline{Q} = const \qquad (2.17)$$

(2.17) jest to tzw. zasada zachowania pędu .

Dziękuję