

# **T5: ZAKŁÓCENIA LOSOWE ORAZ ICH TŁUMIENIE PODCZAS POMIARÓW CYFROWYCH**

1

## **T5-I: ZAKŁÓCENIA LOSOWE**

- **1. ZAKŁÓCENIA PODCZAS POMIARÓW CYFROWYCH**

**Klasyfikacja**

- **2. ZAKŁÓCENIA LOSOWE. SZUMY**

**Podstawowe parametry**

- **3. PRÓBKOWANIE SZUMU:**

**widmo i funkcja autokorelacji spóbkowanego szumu**

- **3.1. Częstotliwość próbkowania mniejsza od częstotliwości granicznej pasma szumu**

- **3.2. Częstotliwość próbkowania większa od częstotliwości granicznej pasma szumu**

2

## 1. Zakłócenia podczas pomiarów cyfrowych

**Zakłócenia** – są to sygnały niepożądane, które przenikają w obwód sygnału pomiarowego i powodują występowania błędnego jego przetwarzania i pomiaru.

3

## 1. Zakłócenia podczas pomiarów cyfrowych

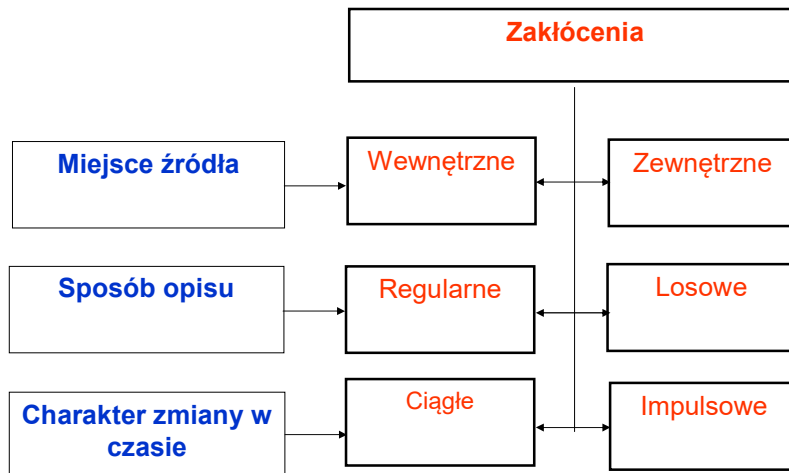
**Wpływ zakłóceń** zależy od poziomu ich wartości względem wartości sygnału pomiarowego, od tak zwanego **stosunku sygnał/szum** (szum jest rozumiany w szerokim pojęciu).

**Negatywne działanie zakłóceń** zależy także od innych ich charakterystyk:

- **rodzaju zakłóceń** (regularne czy losowe),
- **pasma częstotliwości**, **funkcji autokorelacji**,
- **rozkładu amplitud**, itp.

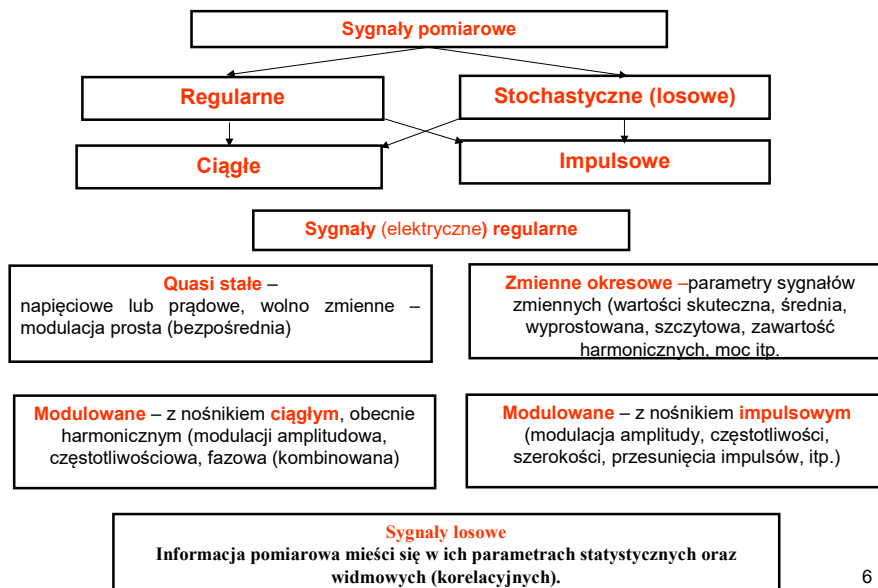
4

## 1.1. Klasyfikacja zakłóceń



5

## 1.1. Klasyfikacja sygnałów pomiarowych



6

## 1.2. Źródła zakłóceń zewnętrznych



## 1.2. Źródła zakłóceń wewnętrznych



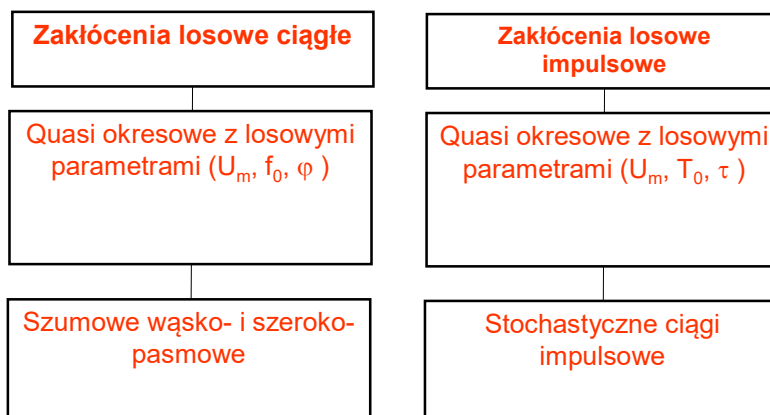
### 1.3. Zakłócenia losowe. Szумы

**Zakłócenia losowe:** są to nieregularne zakłócenia, wartości których nie można opisać pewnymi funkcjami czasu, a tylko parametrami, charakteryzującymi ich pewne średnie właściwości:

- wartości średnie,
- wariancie,
- funkcje autokorelacji oraz
- widmowe,
- rozkład prawdopodobieństwa
- oraz inne

9

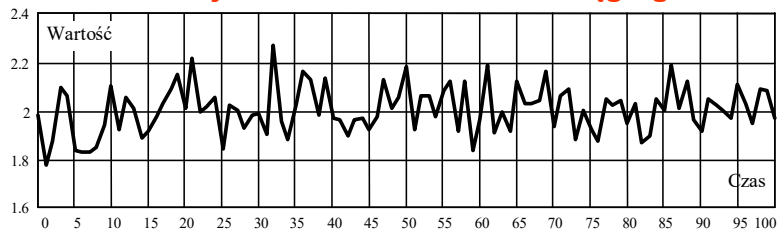
### Zakłócenia losowe. Szумы



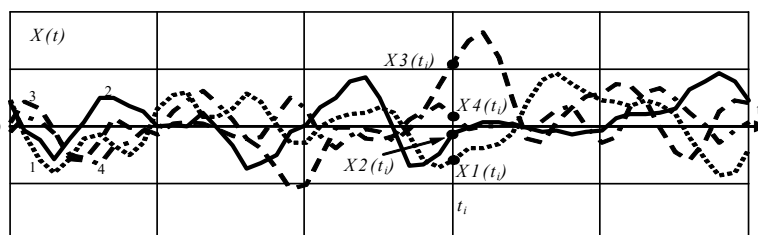
10

## 1.3. Zakłócenia losowe. Szумы

### Jedna realizacja czasowa zakłócenia ciągłego



### Kilka realizacji zakłócenia ciągłego



11

## 1.3. Zakłócenia losowe. Szумы

### Rozróżnia się szумы:

- **cieplne,**
- **śrutowe,**
- **wybuchowe,**
- **lawinowe;**
- **„fliker-szумы” typu 1/f**
- **oraz inne.**

12

### 1.3. Zakłócenia losowe. Szumy

Szumy ciepłe są wszechobecne, ich moc jest proporcjonalna do temperatury elementu oraz pasma częstotliwości.

W zakresie częstotliwości do GHz gęstość widmowa mocy takich szumów praktycznie jest stałą i wynosi

$$N_p = 4kT, W / Hz$$

gdzie  $k$  – stała Boltсмана,  $T$  - temperatura w skali Kelvina.

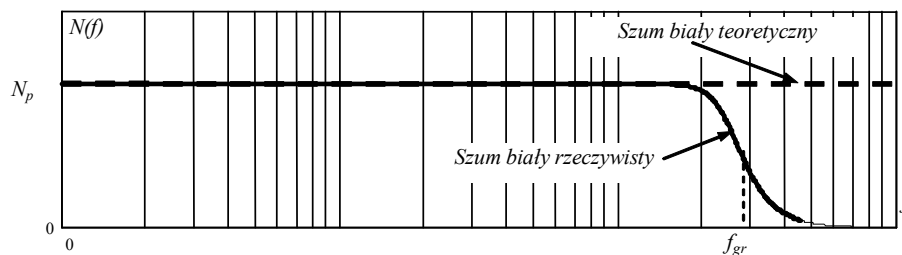
13

### 1.3. Zakłócenia losowe. Szumy

W zakresie częstotliwości do GHz gęstość widmowa mocy takich szumów praktycznie jest stałą i wynosi

$$N_p = 4kT$$

Gęstość widmowa szumu białego



14

### 1.3.Zakłócenia losowe. Szумы

Szum biały rzeczywisty ma ograniczone pasmo na wysokich częstotliwościach (Planck).

Gęstość widmowa mocy szumów zmniejsza się i opisywana jest zależnością :

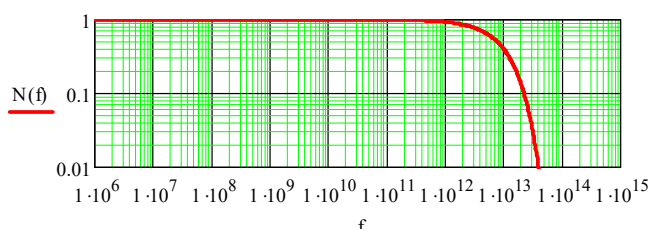
$$N_p(f) = 4kT \cdot N(f)$$

$$N(f) := \frac{\frac{h \cdot f}{k \cdot T}}{e^{\frac{h \cdot f}{k \cdot T}} - 1}$$

$$k := 1.38 \cdot 10^{-23}$$

$$h := 6.62 \cdot 10^{-34}$$

$$T := 300$$



15

### 1.3.Zakłócenia losowe. Szумы

#### Flicker-szum

Gęstość widmowa flicker-szumów (szumów niskoczęstotliwościowych, w przybliżeniu poniżej 100Hz-10kHz) wzrasta ze zmniejszeniem częstotliwości odwrotnie proporcjonalnie do  $1/f^\alpha$ , gdzie  $\alpha \geq 1$  parametr, zależny od właściwości elementu.

Teoretyczne problemy tych szumów nie jest do końca wyjaśnione, właśnie ich zachowanie wokół częstotliwości  $f=0$ , gdyż gęstość widmowa tych szumów dążą do nieskończoności.

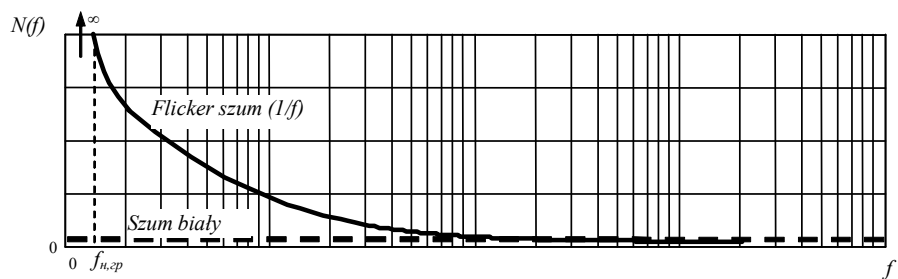
16



### 1.3 Zakłócenia losowe. Szумы

#### Flicker - szum

#### Gęstość widmowa flicker szumu ( $1/f$ )



17

### 1.4. Parametry szumów

W dziedzinie częstotliwości szum opisywany jest gęstością widmową:

- Mocy  $N_p(f)$ , W/Hz
- Napięcia  $N_U(f)$ , V<sup>2</sup>/Hz
- Prądu  $N_I(f)$ , A<sup>2</sup>/Hz

Jako zależność odpowiedniej wielkości w paśmie o nieskończonej szerokości od częstotliwości

18

## 1.4. Parametry szumów

W paśmie częstotliwości  $\Delta f$  moc szumów cieplnych równa się

$$P_{sz} = N_p \Delta f = 4kT\Delta f$$

na rezystorze o rezystancji wartością  $R$  wartość skuteczna napięcia szumowego wynosi (Nyquist)

$$U_{sz} = \sqrt{P_{sz} R} = \sqrt{4kT\Delta f R}$$

19

## 1.4. Parametry szumów

Moc szumu w paśmie częstotliwości od  $f_1$  do  $f_2$  wyznaczana jest poprzez całkowanie gęstości widmowej

$$P_{f_{1,2}} = \int_{f_1}^{f_2} N_p(f) df, W$$

Kwadrat wartości skutecznej (wariancja) napięciowego szumu na rezystorze o rezystancji  $R$  oraz szumu prądowego wyznaczana jest w podobny sposób

$$\sigma_{U_{sz}}^2 = U_{f_{1,2}}^2 = R \cdot \int_{f_1}^{f_2} N_p(f) df, V^2$$

$$\sigma_{I_{sz}}^2 = I_{f_{1,2}}^2 = \frac{1}{R} \cdot \int_{f_1}^{f_2} N_p(f) df, A^2$$

20

## 1.4. Parametry szumów

Pełna moc szumu wyznaczana jest poprzez całkowanie gęstości widmowej w paśmie od 0 do  $\infty$

$$P^2 = \int_0^{\infty} N_p(f) df, W$$

Kwadrat wartości skutecznej (wariancja) szumu napięciowego

$$\sigma_{U_{sz}}^2 = R \cdot \int_0^{\infty} N_p(f) df, V^2$$

Oraz prądowego

$$\sigma_{I_{sz}}^2 = \frac{1}{R} \cdot \int_0^{\infty} N_p(f) df, A^2$$

21

## 1.4. Parametry szumów

Jeśli w paśmie częstotliwości od  $f_1$  do  $f_2$  gęstość widmowa szumu jest stałą:  $N_p(f) = N_p$

Wtedy przy  $\Delta f = f_2 - f_1$  – szerokość pasma

moc szumu:

$$P_{\Delta f}^2 = N_p \cdot \Delta f$$

Wariancja szumu napięciowego:

$$\sigma_{U_{sz}}^2 = R \cdot N_p \cdot \Delta f$$

Wariancja szumu prądowego:

$$\sigma_{I_{sz}}^2 = \frac{N_p \cdot \Delta f}{R}$$

22

## 1.4. Parametry szumu

Jeśli szum charakteryzuje się gęstością widmową  $N_x(f)$ , wtedy w ogólnym przypadku wariancj szumu równa się powierzchnią pod tą gęstością widmową  $N_x(f)$ :

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} N_x(f) df$$

Stąd pasmo szumu zawsze musi być ograniczonym, na przykład jak w przypadku szumu białego rzeczywistego.

23

## 1.4. Parametry szumu

Gęstość widmową  $N_x(f)$  sygnału losowego  $X(t)$  (na przykład szumu) jest wartością oczekiwaną kwadratu modułu transformaty Fouriera  $F_x(f)$  sygnału

$$N_x(f) = E[F_x(jf)F_x(-jf)]$$

$$F_x(jf) = \int_0^{\infty} X(t)e^{-j2\pi \cdot f \cdot t} dt$$

Analiza sygnału zawsze ma ograniczoną trwałość  $T$ , dlatego transformata Fouriera obliczana jest

$$F_{x,T}(jf, T) = \int_0^T X(t)e^{-j2\pi \cdot f \cdot t} dt$$

$$N_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[ \frac{F_x(jf, T)F_x(-jf, T)}{T} \right]$$

24

## 1.4. Parametry szumu

Operacja obliczania wartości oczekiwanej ( $E[*]$ ) przewiduje:

1. Rejestrację dużej liczby ( $K$ ) realizacji sygnału losowego ( $X_k(t)$ ,  $k=1,2,\dots,K$ ),
2. Wyznaczanie transformaty Fouriera dla każdej realizacji  $F_k(jf,T)$ , następnie
3. Obliczanie  $k$ -tej realizacji gęstości  $N_k(f)$
4. Wykonanie uśredniania tych realizacji:

$$N_{x,K}(f) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K N_{x,k}(f)$$

Stąd, ponieważ trwałość  $T$  sygnału losowego oraz liczba realizacji  $K$  są ograniczone, dlatego praktycznie wyznaczanie gęstości widmowej jest zawsze przybliżonym, tj. mamy tylko estymaty gęstości.

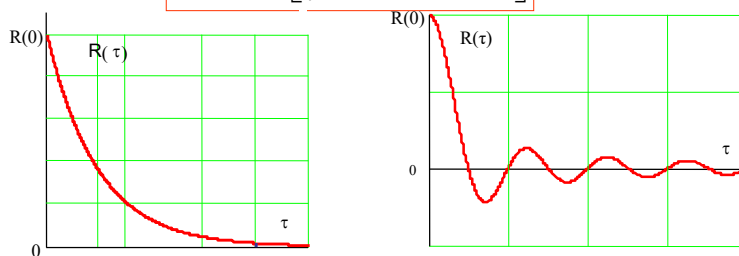
25

## 1.4. Parametry szumów

W dziedzinie czasu szum opisywany jest funkcją autokorelacji :  $R(\tau)$

Która odwzoruje liniową statystyczną zależność próbek szumu (na przykład napięciowego) w odstępie czasu  $\tau$ . Jest to wartość oczekiwaną całki iloczynu wartości sygnału losowego przesuniętych o interwał czasu  $\tau$ :

$$R_x(\tau) = E \left[ \int_0^{\infty} X(t) \cdot X(t + \tau) dt \right]$$



26

## 1.4. Parametry szumu

Funkcja autokorelacji szumu wyznaczana jest jako odwrotne przekształcenie Fouriera gęstości widmowej szumu (i odwrotnie)

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} N_x(f) \cdot e^{j2\pi f \cdot \tau} df = \int_0^{\infty} N_x(f) \cdot e^{j2\pi f \cdot \tau} df$$

Przy wyznaczaniu funkcji autokorelacji też należy uwzględnić:

- Ograniczony czas ( $T < \infty$ ) rejestracji realizacji sygnału,
- Ograniczoną liczbę realizacji ( $K < \infty$ ) do oceny wartości oczekiwanej na drodze uśredniania wartości estymat funkcji autokorelacji każdej z realizacji sygnału.

27

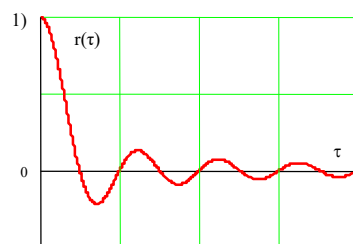
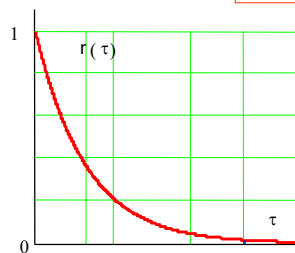
## 1.4. Parametry szumu

Wartość funkcji autokorelacji szumu dla serowego odstępu czasowego  $\tau=0$  jest równa **wariancji szumu**:

$$R_x(\tau=0) = R_x(0) = \sigma_x^2$$

Stosunek funkcji autokorelacji szumu do wariancji szumu nazywana jest **unormowaną funkcją autokorelacji** lub współczynnikiem korelacji

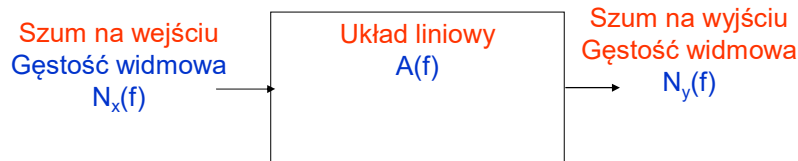
$$r_x(\tau) = \frac{R_x(\tau)}{R_x(0)} = \frac{R_x(\tau)}{\sigma_x^2}$$



28

## 1.5. Szum na wyjściu układu dynamicznego

Jeśli do wejścia układu liniowego dynamicznego, który charakteryzuje się charakterystyką amplitudo - częstotliwościową  $A(f)$  podawany jest szum o widmowej gęstości mocy  $N_x(f)$



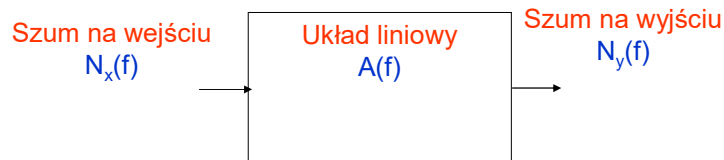
Wtedy gęstość widmowa szumu na wyjściu  $N_y(f)$  równa się iloczynowi gęstości szumu na wejściu oraz kwadratu charakterystyki amplitudo - częstotliwościowej  $A^2(f)$

$$N_y(f) = N_x(f) |A(f)|^2$$

29

## 1.5. Szum na wyjściu układu dynamicznego

Jeśli do wejścia układu liniowego dynamicznego, który charakteryzuje się charakterystyką amplitudo - częstotliwościową  $A(f)$  podawany jest szum o widmowej gęstości  $N_x(f)$



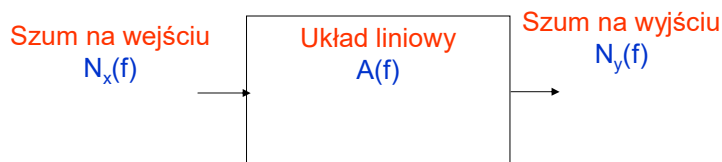
Wtedy wariancja szumu na wyjściu

$$\sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} N_x(f) |A(f)|^2 df$$

30

## 1.5. Szum na wyjściu układu dynamicznego

Funkcja autokorelacji szumu na wyjściu układu wyznaczana jest jako odwrotne przekształcenie Fouriera

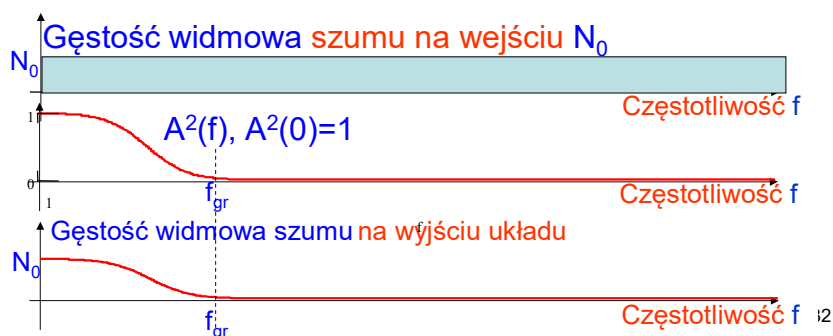


$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} N_y(f) \cdot e^{j2\pi f \cdot \tau} df = \int_{-\infty}^{\infty} N_x(f) A^2(f) \cdot e^{j2\pi f \cdot \tau} df$$

31

## 1.5. Szum na wyjściu układu dynamicznego

Jeśli charakterystyką amplitudo - częstotliwościową  $A(f)$  ma pasmo ograniczone częstotliwością  $f_{gr}$ , która jest w dużym stopniu mniejsza od częstotliwości granicznej szumu białego rzeczywistego, wtedy na wyjściu takiego układu otrzymuje się szum o gęstości widmowej  $N_{wy}(f)$ , która powtarza kwadrat charakterystyki  $A^2(f)$





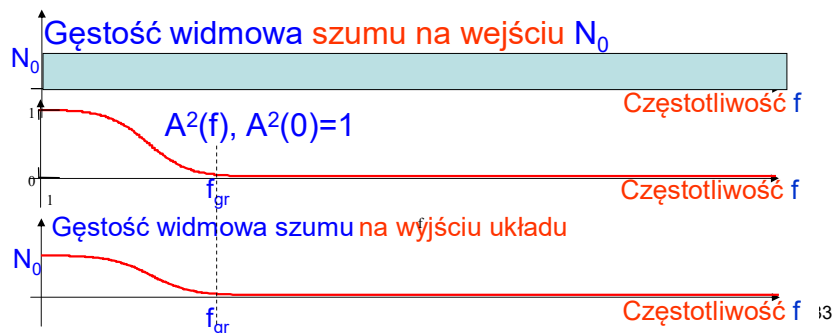
## 1.5. Szum na wyjściu układu dynamicznego

W takim przypadku, wariancja szumu równa się

$$\sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} N_x(f) |A(f)|^2 df = N_0 \int_0^{\infty} A^2(f) df = N_0 \cdot S_{A^2}$$

$$S_{A^2} = \int_0^{\infty} A^2(f) df$$

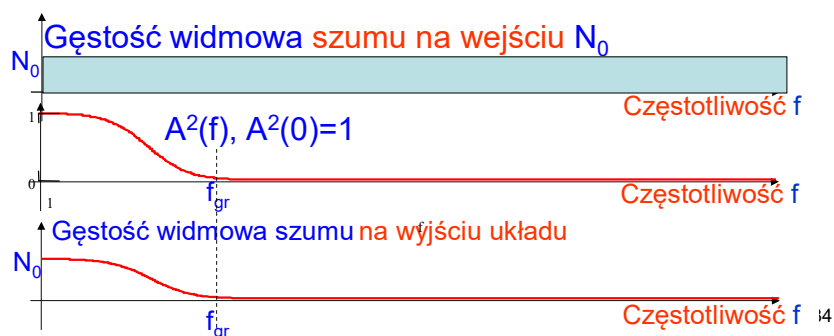
Jest powierzchnią pod kwadratem charakterystyki Ach.



## 1.5. Szum na wyjściu układu dynamicznego

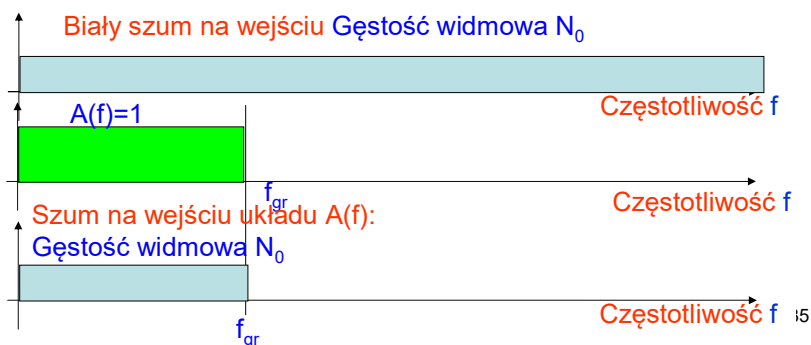
Funkcja autokorelacji szumu na wyjściu jest proporcjonalna do odwrotnego przekształcenia Fouriera kwadratu charakterystyki Ach

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} N_y(f) e^{j2\pi f \cdot \tau} df = N_0 \int_0^{\infty} A^2(f) e^{j2\pi f \cdot \tau} df$$



## 1.5. Szum na wyjściu układu dynamicznego

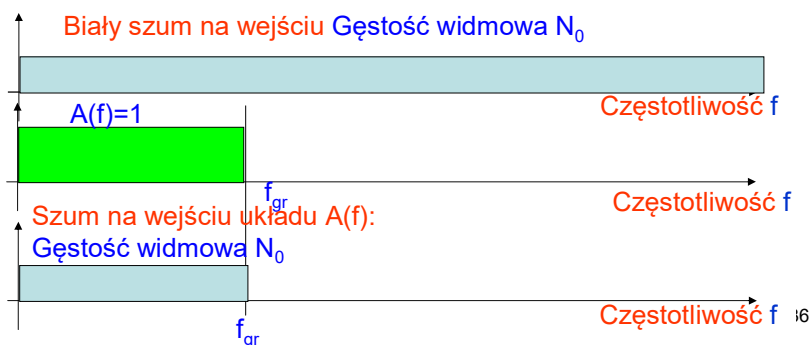
Jeśli charakterystyką amplitudo - częstotliwościową  $A(f)$  jest prostokątną z częstotliwością  $f_{gr}$  pasma przepustowego (Idealny filtr dolnoprzepustowy  $A(f)=1, f \leq f_{gr}$ ), przy czym  $f_{gr}$  jest w dużym stopniu mniejsza od częstotliwości granicznej szumu białego rzeczywistego, wtedy na wyjściu takiego filtra otrzymuje się szum praktycznie o stałej gęstości widmowej  $N_p(f)$  równej gęstości widmowej szumu na wejściu/



## 1.5. Szum na wyjściu układu dynamicznego

W takim przypadku, wariancja szumu równa się

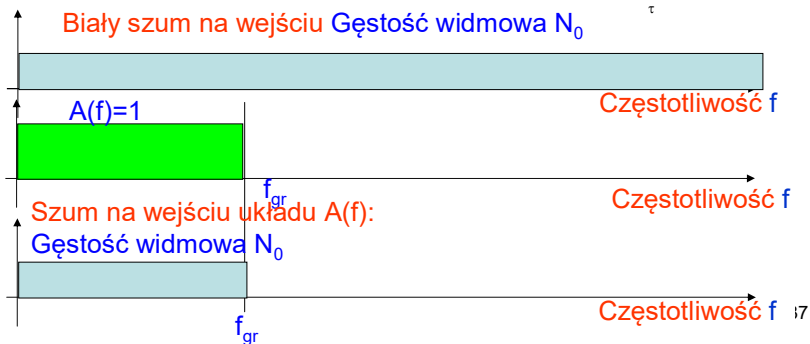
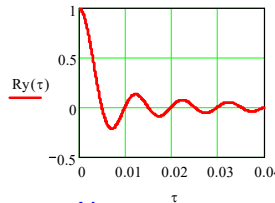
$$\sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} N_x(f) |A(f)|^2 df = \int_0^{f_{gr}} N_0 \cdot 1^2 df = N_0 \cdot f_{gr}$$



## 1.5. Szum na wyjściu układu dynamicznego

Dla szumu ze stałą gęstością widmową w ograniczonym pasmie funkcja autokorelacji: ( $f_{gr}=100$ )

$$R_y(\tau) = \int_0^{f_{gr}} N_0 \cdot e^{j2\pi f \cdot \tau} df = N_0 f_{gr} \cdot \frac{\sin(2\pi f_{gr} \cdot \tau)}{2\pi f_{gr} \cdot \tau}$$

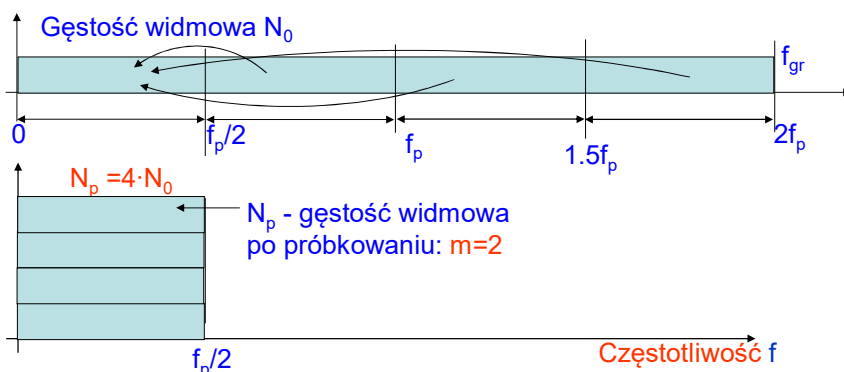


## 3. Próbkowanie szumu

### 3.1. Próbkowanie szumu z pasmem prostokątnym

Częstotliwość próbkowania jest mniejsza od połowy częstotliwości granicznej

Po próbkowaniu szumu ze stałą gęstością widmową w ograniczonym pasmem  $f_{gr}$ , na przykład, jeśli częstotliwość próbkowania  $f_p = f_{gr}/2$ , gęstość widmowa szumu przenosi się w pasmo do  $f_p/2 = f_{gr}/4$  ( $f_p = f_{gr}/2$ ). W wyniku tego w tym paśmie otrzymujemy 4-krotnie większą gęstość widmową.



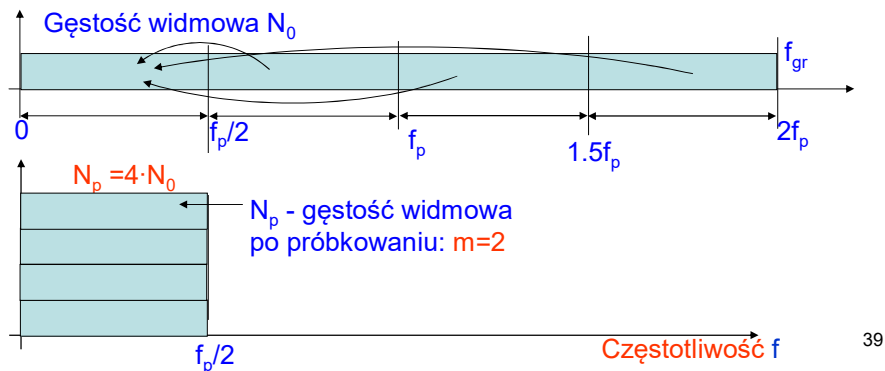
### 3. Próbkowanie szumu

3.1. Próbkowanie szumu z pasmem prostokątnym Częstotliwość próbkowania jest mniejsza od połowy częstotliwości granicznej

Przy liczbie  $n$  zaobserwowanych próbek szumu po próbkowaniu szumu z częstotliwością próbkowania  $f_p$  (okresie próbkowania  $T_p=1/f_p$ ) gęstość widmowa szumu w paśmie do  $f_p=f_{gr}/2$  jest też spróbkowaną z odstępem  $\Delta f=1/(n \cdot T_p)=f_p/n$ .

Tj. w paśmie do  $f_p/2$  umieszcza się  $n/2$  próbek gęstości widmowej.

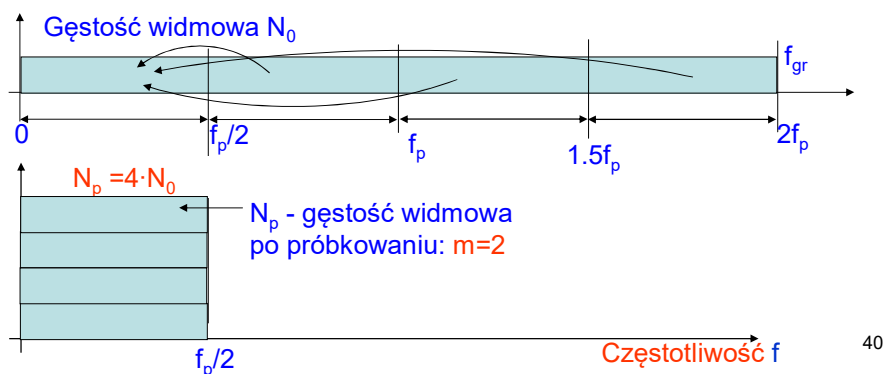
Na tych rysunkach, w celu uproszczenia, nie podano próbek gęstości widmowej.



### 3. Próbkowanie szumu

3.1. Próbkowanie szumu z pasmem prostokątnym Częstotliwość próbkowania jest mniejsza od połowy częstotliwości granicznej

W ogólnym przypadku, jeśli częstotliwość próbkowania  $m$  razy mniejsza od pasma szumu:  $f_p=f_{gr}/m$ , wtedy w paśmie do  $f_p/2$  poziom gęstości zwiększa się o  $2m$  razy:  $N_p=2m \cdot N_0$ .

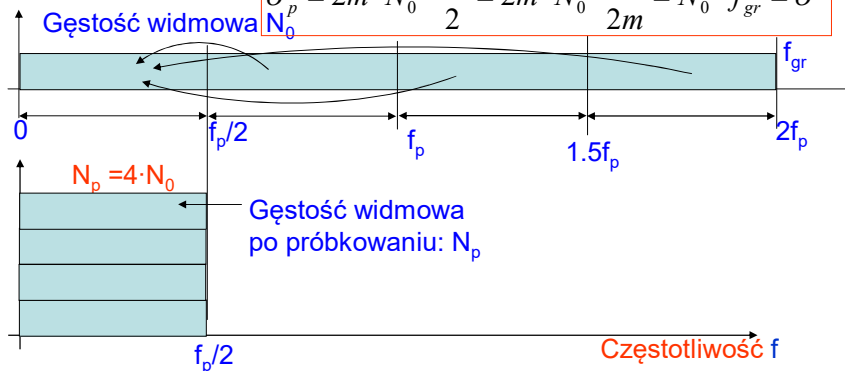


### 3. Próbkowanie szumu

Po próbkowaniu szumu ze stałą gęstością widmową w ograniczonym pasmem  $f_{gr}$ , wariancja pozostaje taką samą jak do próbkowania:

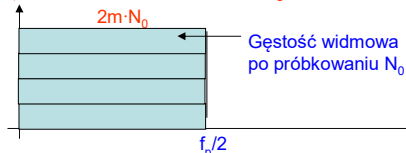
$$\sigma_p^2 = 4 \cdot N_0 \cdot \frac{f_p}{2} = 4 \cdot N_0 \cdot \frac{f_{gr}}{4} = N_0 \cdot f_{gr} = \sigma^2$$

$$\sigma_p^2 = 2m \cdot N_0 \cdot \frac{f_p}{2} = 2m \cdot N_0 \cdot \frac{f_{gr}}{2m} = N_0 \cdot f_{gr} = \sigma^2$$



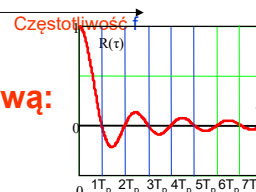
### 3. Próbkowanie szumu

Po próbkowaniu z częstotliwością próbkowania  $f_p = f_{gr}/m$  ( $m$  jest liczbą całkowitą) szumu ze stałą gęstością widmową w ograniczonym pasmem  $f_{gr}$ , gęstość widmowa szumu przenosi się w pasmo do  $f_p/2 = f_{gr}/2m$ . W wyniku czego w tym pasmie otrzymujemy  $2m$ -krotnie większą gęstość widmową.



Dlatego funkcja autokorelacji dla szumu z prostokątną gęstością widmową:

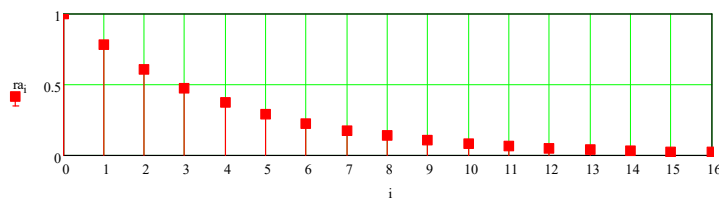
$$R(\tau) = N_0 f_{gr} \cdot \frac{\sin(\pi f_p \cdot \tau)}{\pi f_p \cdot \tau}$$



Na rysunku podano wykres ciągłej funkcji autokorelacji

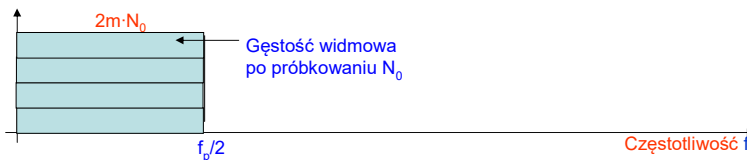
### 3. Próbkowanie szumu

Po próbkowaniu szumu o częstotliwości  $f_p$  – okres  $T_p=1/f_p$  funkcją autokorelacji też jest próbkowaną z okresem  $T_p$ :  $R_i(\tau_i=i \cdot T_p)$



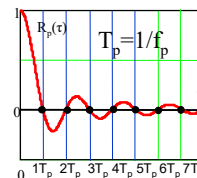
43

### 3. Próbkowanie szumu



Dlatego po próbkowaniu szumu funkcja autokorelacji :

$$R_p(\tau) \Big|_{\tau=i \cdot T_p} = N_0 f_{gr} \cdot \frac{\sin(\pi f_p \cdot i \cdot T_p)}{\pi f_p \cdot i \cdot T_p} = N_0 f_{gr} \cdot \frac{\sin(\pi \cdot i)}{\pi \cdot i}$$



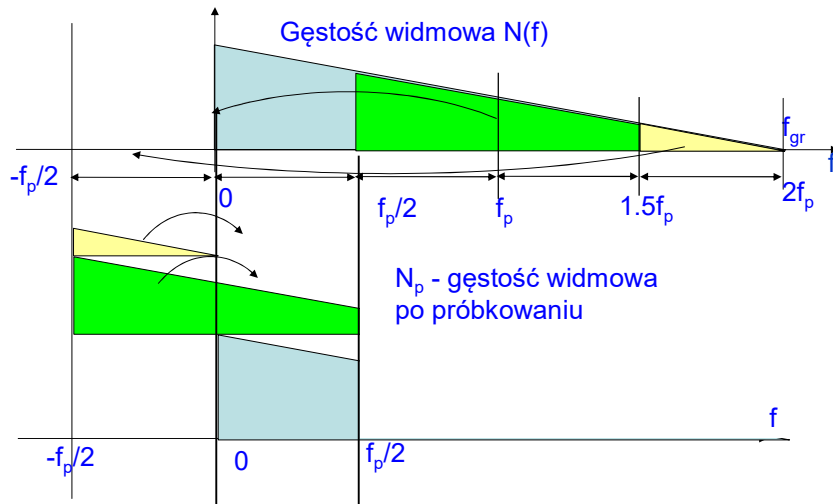
Dla wszystkich  $i \geq 1$   $R_i = 0$ ,

tylko dla zerowego odstępu ( $i=0$ )  $R_0 = N_0 \cdot f_{gr}$ .

Tj. pobrane z odstępem próbkowania  $T_p = 1/f_p$  próbki szumu nie są wzajemnie skorelowane!

### 3. Próbkowanie szumu

Podobnie ma miejsce przy próbkowaniu szumu z trójkątną gęstością widmową  $N(f)$  ( $f_p = f_{gr}/2$ )

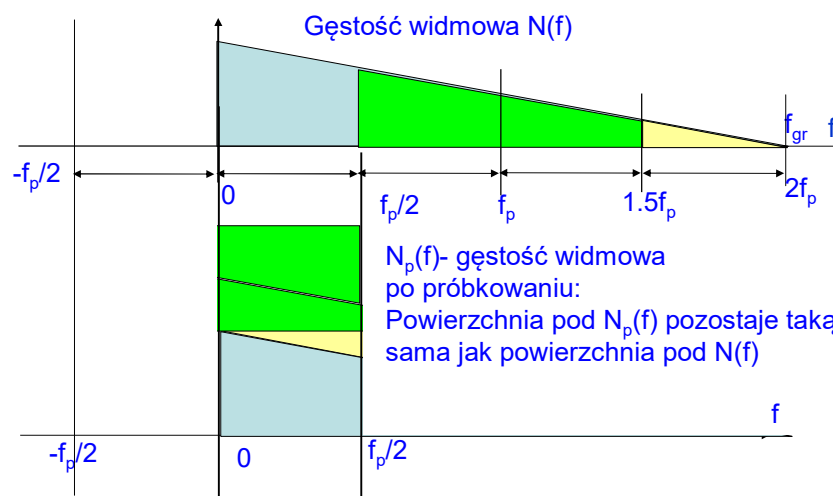


### 3. Próbkowanie szumu

Po próbkowaniu gęstość widmowa szumu przenosi się w pasmo do  $f_p/2$ . W wyniku tego w tym paśmie otrzymujemy tą samą powierzchnia pod  $N_p(f)$  pozostaje

$$N_p = 4 \cdot N_0$$

powierzchnia pod  $N(f)$ .



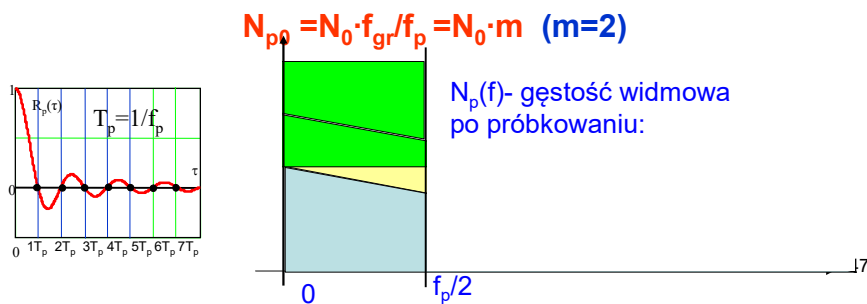
### 3. Próbkowanie szumu

Po próbkowaniu gęstość widmowa szumu przenosi się w pasmo do  $f_p/2$ . W wyniku tego w tym paśmie otrzymujemy taką samą powierzchnię pod  $N_p(f)$  pozostaje taką samą jak powierzchnia pod  $N(f)$

Tj.:  $S_p = N_{p0} \cdot f_p/2 = N_0 \cdot f_{gr}/2$  ( $f_{gr}/f_p = m$ ).

Funkcja autokorelacji spróbkowanego szumu

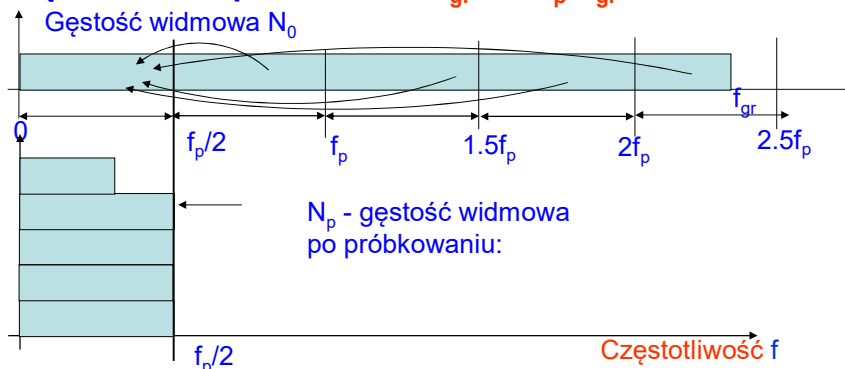
$$R_p(\tau) \Big|_{\tau=iT_p} = N_0 \frac{f_{gr}}{2} \cdot \frac{\sin(\pi f_p \cdot i \cdot T_p)}{\pi f_p \cdot i \cdot T_p} = N_0 \frac{f_{gr}}{2} \cdot \frac{\sin(\pi \cdot i)}{\pi \cdot i}$$



### 3. Próbkowanie szumu

Przy braku synchronizacji częstotliwości próbkowania z częstotliwością graniczną szumu, tj. jeśli  $f_p \neq f_{gr}/m$  (gdzie  $m$  jest liczbą całkowitą) wtedy po próbkowaniu szumu nawet ze stałą gęstością widmową w paśmie do  $f_p/2$  gęstość widmowa nie będzie dokładnie prostokątną.

Na przykład, na rysunku podano przypadek dla częstotliwości próbkowania  $f_{gr}/2.5 < f_p < f_{gr}/2$ .

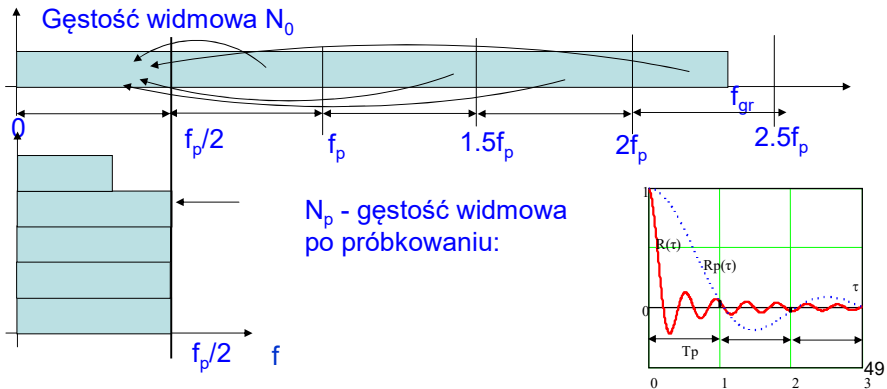




### 3. Próbkowanie szumu

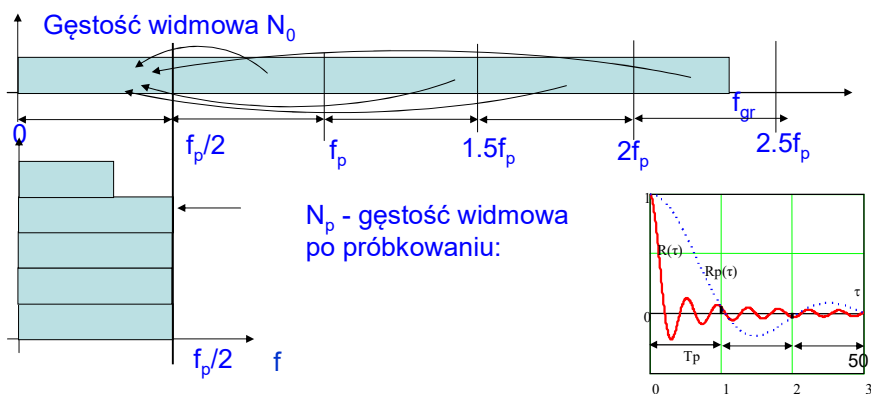
W tym przypadku po próbkowaniu funkcja autokorelacji

$$R_p(\tau) = 4N_0 \frac{f_p}{2} \cdot \frac{\sin\left(2\pi \frac{f_p}{2} \cdot \tau\right)}{2\pi \frac{f_p}{2} \cdot \tau} + N_0(f_{gr} - 2f_p) \cdot \frac{\sin(2\pi(f_{gr} - 2f_p) \cdot \tau)}{2\pi(f_{gr} - 2f_p) \cdot \tau}$$



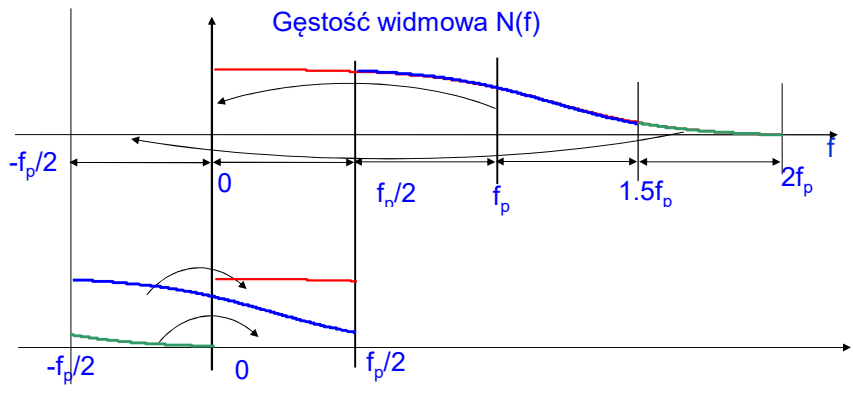
### 3. Próbkowanie szumu

Jednak jeśli częstotliwość próbkowania jest w dużym stopniu mniejsza od szerokości pasma szumu ( $m \gg 1$ ) wtedy wpływ braku synchronizacji  $f_p/2$  oraz  $f_{gr}$  na widmo spróbkowanego szumu oraz funkcję autokorelacji będzie miał rząd  $1/2m$ , tj. praktycznie można przyjąć prostokątną gęstość widmową oraz brak skorelowania próbek szumu.



### 3. Próbkowanie szumu

W przypadku szumu, którego gęstość widmowa nie jest stałą lub liniowo zmienną oraz nie jest ograniczoną po próbkowaniu w paśmie do  $f_p/2$  otrzymuje się gęstość widmowa o nie stałej wartości.



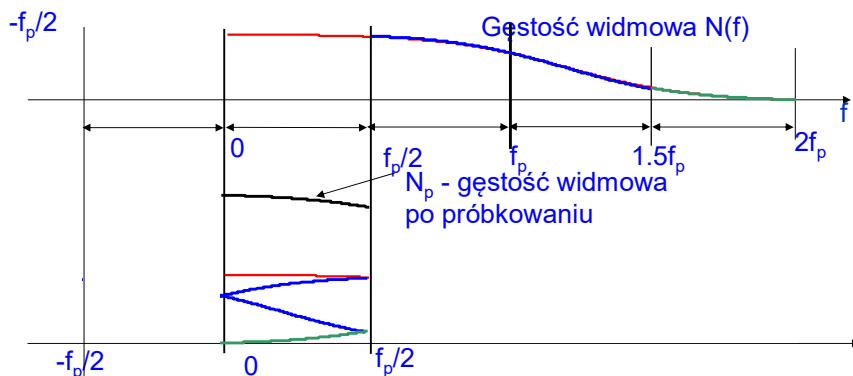
51

### 3. Próbkowanie szumu

Dlatego po próbkowaniu szumu próbki będą częściowo skorelowane i stopień skorelowania zależy od częstotliwości próbkowania.

Jednak przy zmniejszeniu częstotliwości próbkowania w paśmie częstotliwości do  $f_p/2$  kształt gęstości widmowej jest coraz bliżej do prostokątnego.

Powoduje to zmniejszenie stopnia skorelowania dla dowolnego skorelowania szumu niepróbkowanego.



52

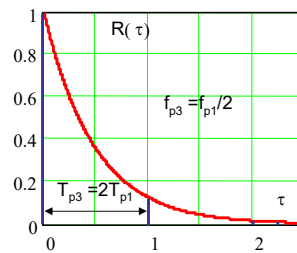
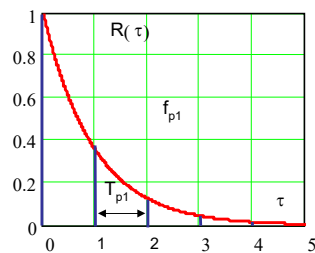
### 3. Próbkowanie szumu

#### 3.1. Częstotliwość próbkowania mniejsza od częstotliwości granicznej pasma szumu

Podczas próbkowania szumu z częstotliwością  $f_p$  (okresem  $T_p = 1/f_p$ ) jego funkcja autokorelacji też jest próbkowana

$$R_{p,i} = R(\tau = i \cdot T_p)$$

Dlatego przy **zmniejszeniu częstotliwości próbkowania** (zwiększeniu okresu próbkowania) sąsiednie próbki stają się **praktycznie nieskorelowanymi** (niezależnie od funkcji korelacji szumu nieskorelowanego).

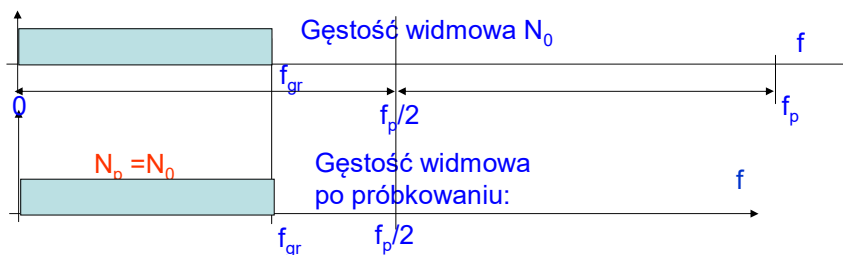


### 3. Próbkowanie szumu

#### 3.2. Częstotliwość próbkowania większa od częstotliwości granicznej pasma szumu

Próbkowaniu szumu ze stałą gęstością widmową w ograniczonym pasmie  $f_{gr}$  przy częstotliwości próbkowania ponad dwukrotnie większej od częstotliwości granicznej:  $f_p > 2 f_{gr}$  powoduje zupełnie inny rezultat.

Ponieważ pasmo szumu znajduje się w paśmie do połowy częstotliwości próbkowania  $f_{gr} < f_p / 2$ , dlatego po próbkowaniu gęstość widmowa pozostaje bez zmian.



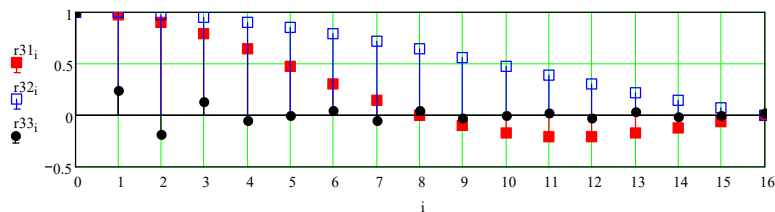
### 3. Próbkowanie szumu

#### 3.2. Częstotliwość próbkowania większa od częstotliwości granicznej pasma szumu

Po próbkowaniu funkcja autokorelacji szumu ma postać:

$$R_p(\tau)_{\tau=iT_p} = N_0 \cdot \frac{f_p}{2 \cdot k} \cdot \frac{\sin\left(\pi \frac{f_p}{k} i \cdot T_p\right)}{\pi \frac{f_p}{k} i \cdot T_p} = N_0 \cdot \frac{f_p}{2 \cdot k} \cdot \frac{\sin\left(\pi \frac{i}{k}\right)}{\pi \frac{i}{k}}$$

Dla  $k_1 = 8$  (czerwony),  $k_2 = 16$  (niebieski) oraz  $k = 2.5$  (czarny) funkcje autokorelacji mają postać:



55

### 3. Próbkowanie szumu

Dla dowolnej gęstości szumu w ograniczonym paśmie po próbkowaniu szumu próbki gęstości będą mieć odstęp:

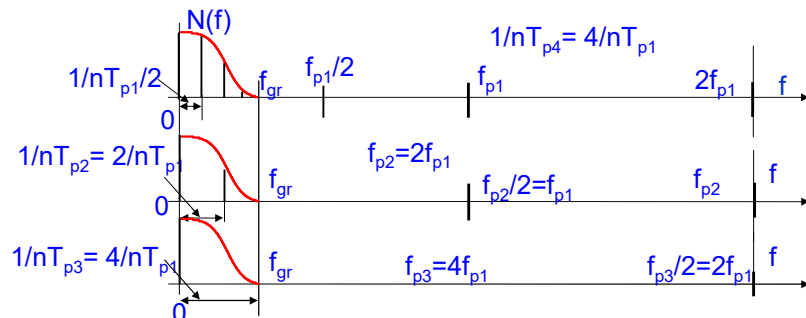
$$\Delta f = 1/nT_p = f_p/n, \text{ n liczba próbek szumu}$$

Wartość którego wzrasta ze wzrostem częstotliwości próbkowania.

Dlatego przy ograniczonym paśmie szumu ( $f_{gr} = \text{const}$ ) liczba próbek gęstości w tym paśmie zmniejsza się.

Odstęp próbek funkcji autokorelacji zmniejsza się  $T_p = 1/f_p$ , tj. zwiększa się skorelowanie próbek szumu.

W granicznym przypadku, kiedy  $\Delta f = f_p/n > f_{gr}$ , pozostaje tylko jedna niezerowa próbka widma przy  $f=0$ . Dla takiego widma  $T_p < 1/nf_{gr}$  tj. praktycznie otrzymuje się 100% korelacja sąsiednich próbek szumu.



56

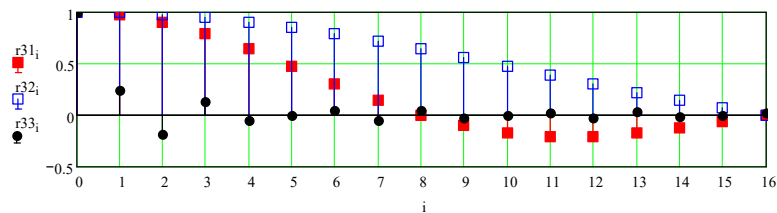
### 3. Próbkowanie szumu

#### 3.2. Częstotliwość próbkowania większa od częstotliwości granicznej pasma szumu

Tj. przy zwiększeniu częstotliwości próbkowania obserwujemy coraz większe skorelowanie sąsiednich próbek.

To dotyczy dowolnej funkcji autokorelacji szumu.

$k1 = 8$  (czerwony),  $k2=16$  (niebieski) oraz  $k=2.5$  (czarny) funkcje autokorelacji mają postać:



57

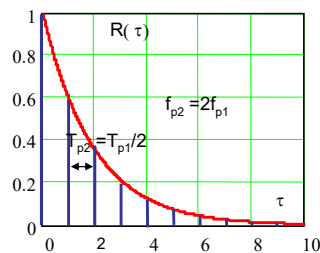
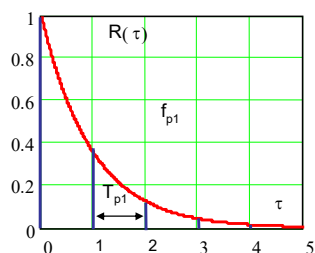
### 3. Próbkowanie szumu

#### • 3.2. Częstotliwość próbkowania większa od częstotliwości granicznej pasma szumu

Ponieważ podczas próbkowania szumu z częstotliwością  $f_p$  (okresem  $T_p=1/f_p$ ) jego funkcja autokorelacji też jest próbkowana

$$R_{p,i} = R(\tau = i \cdot T_p)$$

Dlatego zwiększenie częstotliwości (zmniejszenie okresu) próbkowania powoduje zwiększenie skorelowania sąsiednich próbek sygnału

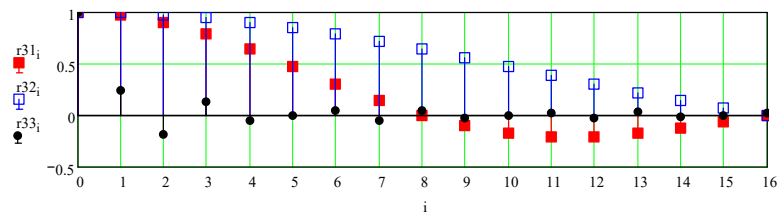


### 3. Próbkowanie szumu

#### 3.2. Częstotliwość próbkowania większa od częstotliwości granicznej pasma szumu

Tj. przy zwiększeniu częstotliwości próbkowania obserwujemy coraz większe skorelowanie sąsiednich próbek.

Otóż, jeśli w celu zwiększenia liczebności próbek w karcie pomiarowej zwiększamy częstotliwość próbkowania, to należy być świadomym, że kolejne zarejestrowane próbki będą skorelowane coraz we większym stopniu, i dlatego takie zwiększenie liczebności próbek nie powiększa informacji o szumie.



59

### Podsumowanie

1) Zmniejszenie częstotliwości próbkowania szumu poniżej szerokości pasma szumu powoduje coraz mniejsze skorelowania próbek szumu.

2) Natomiast zwiększenie częstotliwości próbkowania powyżej szerokości pasma szumu powoduje coraz większe skorelowanie sąsiednich próbek szumu.

Te właściwości dotyczą dowolnego kształtu gęstości widmowej szumu, pod warunkiem, że pasmo jest ograniczonym.

60