

Podstawy Metrologii 2021

Przykładowe zadania do kolokwium N2, Część 1

1) Pomiary napięcia i prądu DC

1. a) W obwodzie elektrycznym, utworzonym szeregowym połączeniem dwóch rezystorów o rezystancji $R_1=15\text{ M}\Omega$ oraz $R_2=5\text{ M}\Omega$ (rezystancyjnym dzielnikiem napięcia), zasilanych od źródła o wartości napięcia $U_{zas}=15\text{ V}$ (rezystancja wyjściowa zasilacza znikomo mała, $R_{zas}\approx 0$), (Rys.1,a), na rezystorze R_1 mierzone jest napięcie. W tym celu wykorzystany woltomierz (Rys.1,b) o rezystancji wejściowej $R_V=10\text{ M}\Omega$. 1) Oszacować mierzone napięcie U_x (do włączenia woltomierza), 2) wskazanie woltomierza U_V oraz wartość 3) systematycznego błędu bezwzględnego Δ_{RV} i 4) systematycznego błędu względnego δ_{RV} spowodowanych ograniczoną wartością rezystancji wejściowej woltomierza.

Rozwiązanie.

1) Do włączenia woltomierza (Rys.1,a) napięcie wyjściowe (na rezystorze R_1):

$$U_x = U_1 = U_{zas} \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 15\text{ V} \frac{15\text{ M}\Omega}{15\text{ M}\Omega + 5\text{ M}\Omega} = 11.25\text{ V}$$

2a) Po dołączeniu woltomierza z rezystancją wejściową R_V równolegle do rezystora R_1 (Rys.1,b) wypadkowa rezystancja jest równa:

$$R_{1-V} = \frac{R_1 R_V}{R_1 + R_V} = \frac{15\text{ M}\Omega \cdot 10\text{ M}\Omega}{15\text{ M}\Omega + 10\text{ M}\Omega} = 6\text{ M}\Omega$$

2b) Dlatego po włączeniu woltomierza jego wskazanie zmniejszy się:

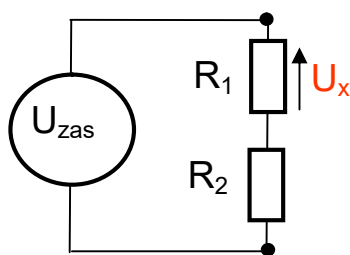
$$U_V = U_{1-V} = U_{zas} \frac{R_{1-V}}{R_{1-V} + R_2} = 15\text{ V} \frac{6\text{ M}\Omega}{6\text{ M}\Omega + 5\text{ M}\Omega} = 8.1818\text{ V}$$

3) Błąd bezwzględny systematyczny wskazania woltomierza, spowodowany ograniczoną wartością jego rezystancji wejściowej:

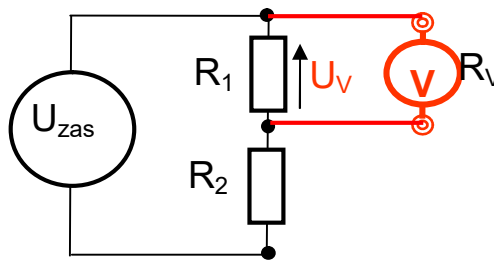
$$\Delta U_{RV} = U_V - U_x = 8.1818\text{ V} - 11\text{ V} = -3.682\text{ V}$$

4) Błąd względny systematyczny wskazania woltomierza:

$$\delta_{RV} = \frac{\Delta U_{RV}}{U_x} 100\% = \frac{-3.682\text{ V}}{11.25\text{ V}} 100\% \approx -27.3\%$$



Rys.1,a



Rys.1,b

1. b) W obwodzie elektrycznym, utworzonym rezystancyjnym szeregowym połączeniem dwóch rezystorów o nieznanach wartościach rezystancji R_1 oraz R_2 , zasilanych od źródła o nie znanej wartości napięcia U_{zas} (rezystancja wyjściowa zasilacza znikomo mała, $R_{zas}\approx 0$), na rezystorze R_1 (lub R_2) mierzone jest napięcie. W tym celu wykorzystany woltomierz (Rys.2,a) o rezystancji wejściowej $R_V=1\text{ M}\Omega$, którego wskazanie $U_{V1}=6.420\text{ V}$. W celu korekcji systematycznego błędu wyniku pomiaru, spowodowanego wpływem ograniczonej wartości rezystancji woltomierza, równolegle do niego został podłączony drugi woltomierz (Rys.2.b) o rezystancji $R_{V2}=2\text{ M}\Omega$ (lub dodatkowy rezystor o rezystancji $R_b=2\text{ M}\Omega$). Po podłączeniu drugiego woltomierza wskazanie pierwszego woltomierza zmniejszyło się i wynosi $U_{V12}=5.825\text{ V}$. 1) Oszacować skorygowaną wartość wyniku pomiaru napięcia DC w obwodzie

elektrycznym, 2) wartość systematycznego błędu bezwzględnego pierwszego wskazania Δ_{v1} i 3) wartość systematycznego względnego błędu δ_{v1} .

Rozwiązanie.

Skorygowana wartość wyniku pomiaru napięcia

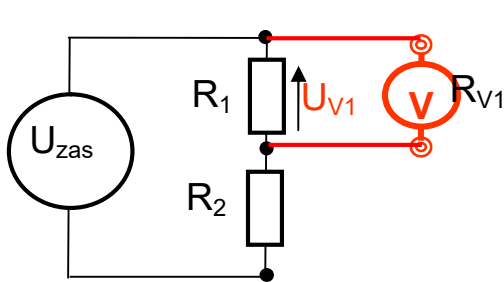
$$U_{x, kor} = U_{V1} \frac{R_{v1}/R_{v2}}{1 + R_{v1}/R_2 - U_{V1}/U_{V12}}$$

1a) Według zadania stosunek rezystancji obydwu woltomierze: $R_{v1}/R_{v2} = 1M\Omega/2M\Omega = 0.5$

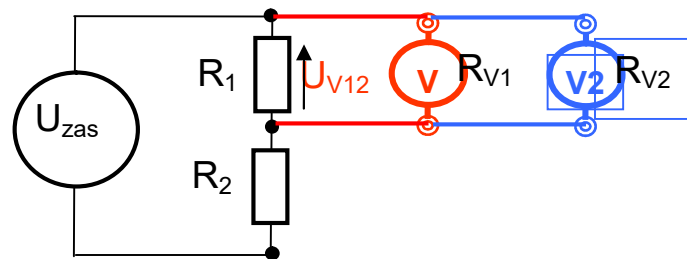
1b) Według obydwu wskazań woltomierza, stosunek napięć: $U_{V1}/U_{V12} = 6.420 V/5.825 V = 1.1021$

1c) Skorygowana wartość wyniku pomiaru napięcia

$$U_{x, kor} = 6.420 V \frac{0.5}{1 + 0.5 - 1.1021} = 8.0674 V$$



Rys.2,a



Rys.2,b

2) Błąd bezwzględny systematyczny pierwszego wskazania woltomierza

$$\Delta U_{V1} = U_{V1} - U_{kor} = 6.420 V - 8.0674 V = -1.6474 V$$

3) Błąd względny systematyczny wskazania woltomierza

$$\delta_{U_V} = \frac{\Delta U_{V1}}{U_{kor}} 100\% = \frac{-1.6474 V}{8.0674 V} 100\% \approx -20.4\%$$

1, c) W obwodzie elektrycznym, utworzonym podłączeniem do zasilacza o napięciu zasilania $U_{zas}=1.5 V$ (rezystancja wyjściowa zasilacza znikomo mała, $R_{zas}\approx 0$) rezystora o wartości rezystancji $R_1=15 \Omega$, mierzony jest prąd amperomierzem o rezystancji wejściowej $R_A=1 \Omega$. 1) Wyznaczyć wartość prądu I_x (do włączenia amperomierza), 2) wskazanie amperomierza I_A oraz wartość systematycznego błędu 3) bezwzględnego Δ_{RA} i 4) względnego błędu δ_{RA} spowodowanego ograniczoną wartością rezystancji wejściowej amperomierza.

Rozwiązanie.

1) Do włączenia amperomierza prąd w obwodzie:

$$I_x = \frac{U_{zas}}{R_1} = \frac{1.5 V}{30 \Omega} = 0.05 A = 50 mA$$

2a) Po dołączeniu szeregowo amperomierza z rezystancją wejściową R_A rezystancja obwodu powiększy się o wartość jego rezystancji, tj. sumaryczna rezystancja obwodu jest równa:

$$R_{1-A} = R_1 + R_A = 30 \Omega + 1 \Omega = 31 \Omega$$

2b) Dlatego po włączeniu amperomierza jego wskazanie zmniejszy się i wynosi:

$$I_A = \frac{U_{zas}}{R_{1-A}} = \frac{1.5 V}{31 \Omega} = 0.04839 A = 48.39 mA$$

3) Błąd bezwzględny systematyczny wskazania amperomierza spowodowanego ograniczoną wartością jego rezystancji wejściowej:

$$\Delta I_{RA} = I_A - I_x = 48.39 mA - 50 mA = -1.61 mA$$

4) Błąd względny systematyczny wskazania amperomierza

$$\delta_{R_A} = \frac{\Delta I_{RA}}{I_x} 100\% = \frac{-1.61 \text{ mA}}{50 \text{ mA}} 100\% \approx -3.23\%.$$

1, d) W obwodzie elektrycznym, utworzonym połączeniem do zasilacza o nieznannej wartości napięcia zasilania U_{zas} (rezystancja wyjściowa zasilacza znikomo mała, $R_{zas} \approx 0$) rezystora o nieznannej wartości rezystancji R_1 , mierzony jest prąd amperomierzem o rezystancji wejściowej $R_A = 0.5 \Omega$, którego wskazanie $I_{A1} = 22.43 \text{ mA}$. W celu korekcji systematycznego błędu wyniku pomiaru, spowodowanego wpływem ograniczonej wartości rezystancji amperomierza, szeregowo do niego został podłączony drugi amperomierz o rezystancji $R_{A2} = 0.75 \Omega$ (lub dodatkowy rezystor o rezystancji $R_b = 0.75 \Omega$). Po podłączeniu dodatkowego amperomierza (rezystora) jego wskazanie zmniejszyło się i wynosi $I_{A12} = 19.75 \text{ mA}$. Oszacować skorygowaną wartość wyniku pomiaru prądu, oraz 2) wartość systematycznego błędu bezwzględnego pierwszego Δ_{A1} i 3) wartość systematycznego względnego błędu δ_{A1} wskazania amperomierza.

Rozwiązanie.

Skorygowana wartość wyniku pomiaru prądu:

$$I_{x, kor} = I_{A1} \frac{R_{A1}/R_{A2}}{1 + R_{A1}/R_{A2} - I_{A1}/I_{A12}}$$

1a) Według zadania stosunek rezystancji obydwu amperomierzy: $R_{A1}/R_{A2} = 0.5\Omega/0.75\Omega = \frac{2}{3}$

1b) Według obydwu wskazań amperomierza, stosunek prądów: $I_{A1}/I_{A12} = 22.43 \text{ mA}/19.75 \text{ mA} = 1.0810$

1c) Skorygowana wartość wyniku pomiaru prądu

$$I_{x, kor} = 22.43 \text{ mA} \frac{2/3}{1 + 2/3 - 1.0810} = 25.532 \text{ mA}$$

2) Błąd bezwzględny systematyczny pierwszego wskazania amperomierza:

$$\Delta I_{A1} = I_{A1} - I_{x, kor} = 22.43 \text{ mA} - 25.532 \text{ mA} = -3.102 \text{ mA}$$

3) Błąd względny systematyczny wskazania amperomierza:

$$\delta_{I_{A1}} = \frac{\Delta I_{A1}}{I_{x, kor}} 100\% = \frac{-3.102 \text{ mA}}{25.532 \text{ mA}} 100\% \approx -12.1\%.$$

2) Pomiary rezystancji na prądzie stałym

2.a). Rezystancja około $R_x \approx 2,5 \Omega$ mierzona jest metodą techniczną: prąd amperomierzem: wskazanie amperomierza $I_A = 78,25 \text{ mA}$, rezystancja amperomierza $R_A = 0,1 \Omega$, a napięcie - woltomierzem: wskazanie $U_V = 197.5 \text{ mV}$, rezystancja $R_V = 1 \text{ M}\Omega$.

1) Dla zadanych wskazań mierników wyznaczyć wartość rezystancji R_x

2) Dobrać metodę pomiaru: (a) poprawnego pomiaru prądu lub (b) napięcia, która zapewni mniejszy błąd systematyczny wyniku pomiaru rezystancji.

3) Oszacować nieskorygowany względny błąd metodyczny wyniku pomiaru rezystancji spowodowany rezystancjami wejściowymi mierników w obydwu metodach.

Rozwiązanie:

1) Dla zdanych wskazań mierników zmierzona wartość rezystancji:

$$R_{pom} = R_{meas} = \frac{U_V}{I_A} = \frac{197.5 \text{ mV}}{78.25 \text{ mA}} = 2.524 \Omega$$

2) Dla danych wartości rezystancji mierników przybliżona wartość graniczna rezystancji

$$R_{gr} \approx \sqrt{R_V \cdot R_A} = \sqrt{1 \cdot 10^6 \Omega \cdot 0.1 \Omega} = 316 \Omega$$

Ponieważ $R_{pom}=2.524 \Omega < 316 \Omega =R_{gr}$, dlatego mierzona rezystancja jest „małą” i należy wykorzystać metodę poprawnego pomiaru napięcia.

3a) W metodzie poprawnego pomiaru prądu wynik pomiaru: $R_{pom}=R_x+R_A$, dlatego względny błąd metodyczny wyniku pomiaru rezystancji spowodowany rezystancją amperomierza jest równy:

$$\delta_{mA} = \frac{R_A}{R_x} 100\% \approx \frac{0.1 \Omega}{2.534 \Omega} 100\% \approx 3.96\%.$$

3b) W metodzie poprawnego pomiaru napięcia mierzono rezystancję równoległego połączenia rezystancji, tj. wynik pomiaru: $R_{pom} = \frac{R_x R_V}{R_x + R_V}$, dlatego względny błąd metodyczny wyniku pomiaru rezystancji spowodowany rezystancją woltomierza jest równy:

$$\delta_{mV} = \frac{R_{pom} - R_x}{R_x} 100\% = \frac{-R_x}{R_V + R_x} 100\% \approx -\frac{2.534 \Omega}{1 \cdot 10^6 \Omega + 2.534 \Omega} 100\% \approx -0.00025\%.$$

2.b). Rezystancja mierzona jest metodą techniczną (amperomierzem i woltomierzem). Wskazanie amperomierza $I_A=16,2 \text{ mA}$, zakres $I_n=20 \text{ mA}$, maksymalny błąd dopuszczalny wskazania amperomierza wyznaczone są jako: $a=0,5\%$ od wskazania amperomierza $+0,25\%$ od zakresu. Wskazanie woltomierza $U_V=8,64 \text{ V}$, zakres $U_n=10 \text{ V}$, maksymalny błąd dopuszczalny wskazania woltomierza wyznaczany jest jako: $a=0,4\%$ od wskazania woltomierza $+0,4\%$ od zakresu.

- 1) Dla zadanych wskazań mierników wyznaczyć wartość rezystancji R_x
- 2) Oszacować względne standardowe niepewności wyników pomiaru prądu i napięcia
- 3) Oszacować względną standardową niepewność wyniku pomiaru rezystancji.
- 4) Oszacować bezwzględną standardową niepewność wyniku pomiaru rezystancji.

Rozwiązanie:

- 1) Dla zdanych wskazań mierników zmierzona wartość rezystancji:

$$R_{pom} = R_{meas} = \frac{U_V}{I_A} = \frac{8.64 \text{ V}}{16.2 \text{ mA}} = 533.33 \Omega$$

- 2a) Względna standardowa niepewność wyniku pomiaru prądu

$$u_{B,rel}(I) = \frac{a_A \cdot I_A + b_A \cdot I_n}{\sqrt{3} \cdot I_A} = \frac{0.5\% \cdot 16.2 \text{ mA} + 0.25\% \cdot 20 \text{ mA}}{\sqrt{3} \cdot 16.2 \text{ mA}} = 0.467 \%$$

- 2b) Względna standardowa niepewność wyniku pomiaru napięcia

$$u_{B,rel}(U) = \frac{a_V \cdot U_V + b_V \cdot U_n}{\sqrt{3} \cdot U_V} = \frac{0.4\% \cdot 8.64 \text{ V} + 0.4\% \cdot 10 \text{ V}}{\sqrt{3} \cdot 8.64 \text{ V}} = 0.498 \%$$

- 3) Względną standardową niepewność wyniku pomiaru rezystancji

$$u_{B,rel}(R) = \sqrt{u_{B,rel}^2(I) + u_{B,rel}^2(U)} = \sqrt{(0.467\%)^2 + (0.498\%)^2} = 0.683 \%$$

- 4) Bezwzględną standardową niepewność wyniku pomiaru rezystancji

$$u_{B,rel}(R) = \frac{u_{B,rel}(R) \cdot R_{pom}}{100\%} = \frac{0.683\% \cdot 533.33 \Omega}{100\%} = 3.64 \Omega$$