

**T11. POMIARY PARAMETRÓW RLC
Z BEZPOŚREDNIM
PRZETWARZANIEM I DETEKTORAMI
SYNCHRONICZNYMI
ORAZ METODĄ IMPEDANCYJNĄ NA
DWÓCH CZĘSTOTLIWOŚCIACH**

1

Cel: Zapoznać się z metodą pomiaru RLC na dwóch częstotliwościach

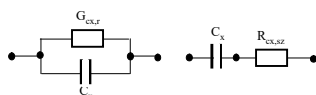
Plan:

- 1. Wstęp. Podstawowe modele i parametry obiektów RLC**
- 2. Metody pomiaru RLC**
- 3. Układy bezpośredniego przetwarzania LC z detektorami synchronicznymi**
- 4. Wirtualny miernik RLC z cyfrową detekcją synchroniczną**
- 5. Zasada metody pomiaru parametrów RLC na dwóch częstotliwościach**
- 6. Wirtualne mierniki RLC na dwóch częstotliwościach**
- 7. Niepewność pomiaru RLC na dwóch częstotliwościach**
- 8. Przykład**

2

1. Wstęp. Podstawowe modele i parametry obiektów RLC

Przy uproszczonych założeniach obiekt pojemnościowy można przedstawić układem zastępczym równoległym z części pojemnościowej C_x oraz konduktancyjnej $G_{cx,r}$ (rys. 1,a) lub układem zastępczym szeregowym z części pojemnościowej C_x rezystancyjnej $R_{cx,sz}$ (rys.1,b)



Rys.1. Układy zastępczy pojemnościowego obiektu:
a – równoległy, b - szeregowy

Dla układu na rys. 1,a admitancja pojemnościowego obiektu opisuje się wzorem

$$Y_c = G_{cx,r} + j\omega \cdot C_x$$

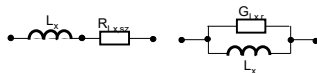
a impedancja układu zastępczego szeregowego pojemnościowego obiektu równa się

$$Z_c = R_{cx,sz} + \frac{1}{j\omega \cdot C_x}$$

3

1. Wstęp. Podstawowe modele i parametry obiektów RLC

Przy uproszczonych założeniach obiekt indukcyjny można przedstawić układem zastępczym szeregowym z części indukcyjnej L_x oraz rezystancyjnej $R_{Lx,sz}$ (rys. 1,a) lub układem równoległym zastępczym z części indukcyjnej L_x oraz konduktancyjnej $G_{Lx,r}$ (rys.1,b)



Rys.2. Układy zastępczy indukcyjnego obiektu:
a – szeregowy, b -równoległy

Dla układu na rys. 2,a impedancja indukcyjnego obiektu opisuje się wzorem

$$Z_L = R_{Lx,sz} + j\omega \cdot L_x$$

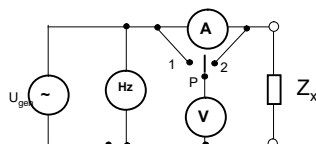
a admitancja układu zastępczego szeregowego indukcyjnego obiektu równa się

$$G_L = G_{Lx,r} + \frac{1}{j\omega \cdot L_x}$$

4

2. Metody pomiaru RLC

- **Metoda techniczna** (metoda amperomierza – woltomierza (rys. 3)) pomiaru parametrów LC z zasady nie jest metodą budowy miernika LC, chociaż w niektórych wypadkach tą zasadę można wykorzystać w elektronicznych miernikach wyposażonych analogowo cyfrowymi przetwornikami (A/C) oraz procesorowymi (obliczeniowymi) blokami.



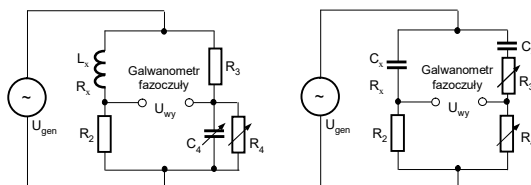
Metoda techniczna do pomiaru parametrów LC

$$Z_x = \frac{U_V}{I_A} \quad R_x = \frac{P_x}{I_x^2} = \frac{U_x^2}{P_x} \quad X_x = \frac{Q_x}{I_x^2} = \frac{U_x^2}{Q_x}$$

5

2. Metody pomiaru RLC

- **Układy mostkowe** prądu zmiennego rzadko są wykorzystywani do budowy elektronicznych przyrządów (mierników) parametrów LC w wyniku problemów realizacji automatycznego zrównoważenia mostka po dwóch parametrach (rezystancja - reaktancja). Przykładowo dwa rodzaje mostków do pomiaru pojemności oraz indukcyjności są pokazane na rys. 4. Chociaż są mierniki z automatycznym zrównoważeniem mostka jednak one duże wymiary oraz czas przetwarzania jest za dużym.



- Rys. 4. Przykłady mostków prądu zmiennego:
- a – mostek Makswella-Wiena, b - mostek Wiena.

6

2. Metody pomiaru RLC

Układy mostkowe prądu zmiennego

$$L_x = R_2 R_3 C_4$$

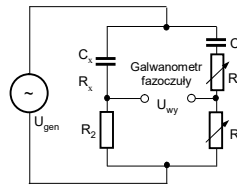
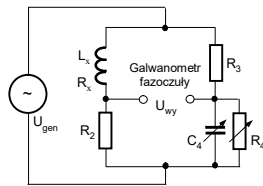
$$R_x = \frac{R_2 R_3}{R_4}$$

$$C_x = \frac{R_4}{R_2} C_3 \quad R_x = \frac{R_2}{R_4} R_3$$

$$\tau_x = \frac{L_x}{R_x} = R_4 C_4$$

$$Q_x = \frac{\omega L_x}{R_x} = \omega R_4 C_4 = \omega \tau_x$$

$$\operatorname{tg} \delta = 1/Q \quad \operatorname{tg} \delta_x = \frac{1}{Q_x} = \omega R_x C_x = \omega R_3 C_3 = \omega \tau_x$$



7

2. Metody pomiaru RLC

Zasada bezpośredniego przetwarzania LC

Do budowy Cyfrowych przyrządów (mierników) parametrów LC najczęściej wykorzystuje się metody:

- - bezpośredniego przetwarzania parametrów LC w napięcie z następnym formowaniem sygnału proporcjonalnego mierzonemu parametrowi;
- - przetwarzania parametru w czasowo – częstotliwościowe parametry sygnału z następnym ich cyfrowym pomiarem.

8

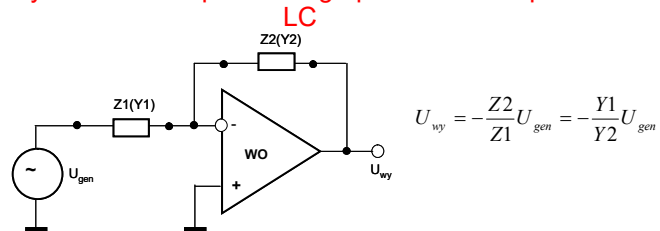
- **2. Metody pomiaru RLC**

- Podstawowy układ do bezpośredniego przetwarzania parametrów LC bazuje na układzie odwracającego wzmacniacza operacyjnego (WO) zasilanego od generatora zmiennoprądowego i włączeniem badanego obiektu w jeden z obwodów sprzężenia zwrotnego (rys. 5)

9

3. Układy bezpośredniego przetwarzania LC z detektorami synchronicznymi

Podstawowy układ do bezpośredniego przetwarzania parametrów LC



gdzie $Z1$, $Z2$ - impedancje oraz
 $Y1=1/Z1$, $Y2=1/Z2$ - admitancje ;
 U_{gen} - napięcie generatora.

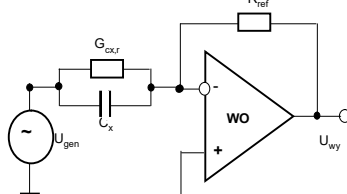
10

3. Układy bezpośredniego przetwarzania LC z detektorami synchronicznymi

Obiekt pojemnościowy

$$Y_c = G_{cx,r} + j\omega \cdot C_x$$

$$U_{wy} = -\frac{Z2}{Z1} U_{gen} = -\frac{Y1}{Y2} U_{gen}$$



Rys. 6,a. Układy do pomiaru parametrów pojemnościowego obiektu

$$U_{wy}(C_x) = -(j\omega \cdot C_x + G_{Cx,r}) R_{ref} U_{gen} = -j\omega \cdot C_x R_{ref} U_{gen} - G_{Cx,r} R_{ref} U_{gen}$$

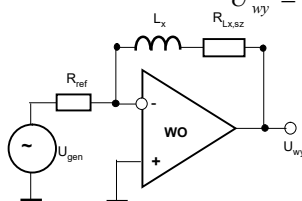
11

3. Układy bezpośredniego przetwarzania LC z detektorami synchronicznymi

Obiekt indukcyjny

$$Z_L = R_{Lx,sz} + j\omega \cdot L_x$$

$$U_{wy} = -\frac{Z2}{Z1} U_{gen} = -\frac{Y1}{Y2} U_{gen}$$



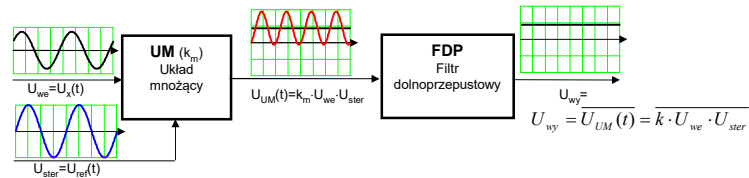
Układy do pomiaru parametrów indukcyjnego obiektu

$$U_{wy}(L_x) = -\frac{(j\omega \cdot L_x + R_{Lx,sz})}{R_{ref}} U_{gen} = -\frac{j\omega \cdot L_x}{R_{ref}} U_{gen} - \frac{R_{Lx,sz}}{R_{ref}} U_{gen}$$

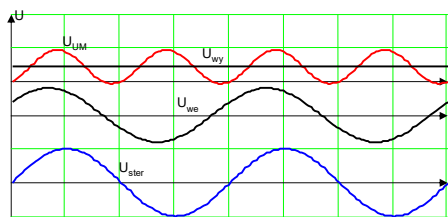
12

3. Układy bezpośredniego przetwarzania LC z detektorami synchronicznymi

Wykorzystanie detekcji synchronicznej



- Rys. 8. Uproszczony układ do synchronicznej detekcji sygnału

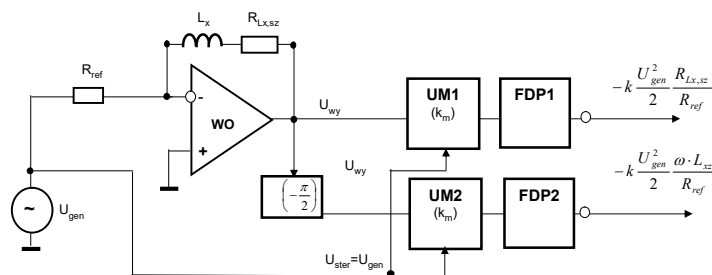


Rys. 9. Zasada synchronicznej detekcji sygnału

13

3. Układy bezpośredniego przetwarzania LC z detektorami synchronicznymi

Obiekt indukcyjny

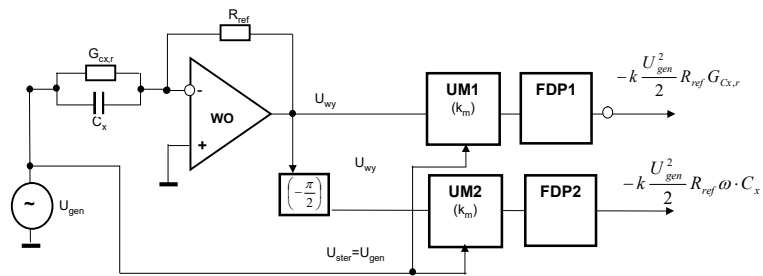


- Rys. 11. Przykładowy układ strukturalny przetwarzania parametrów obiektu badanego pojemnościowego w napięcie z wykorzystaniem detekcji synchronicznej

14

3. Układy bezpośredniego przetwarzania LC z detektorami synchronicznymi

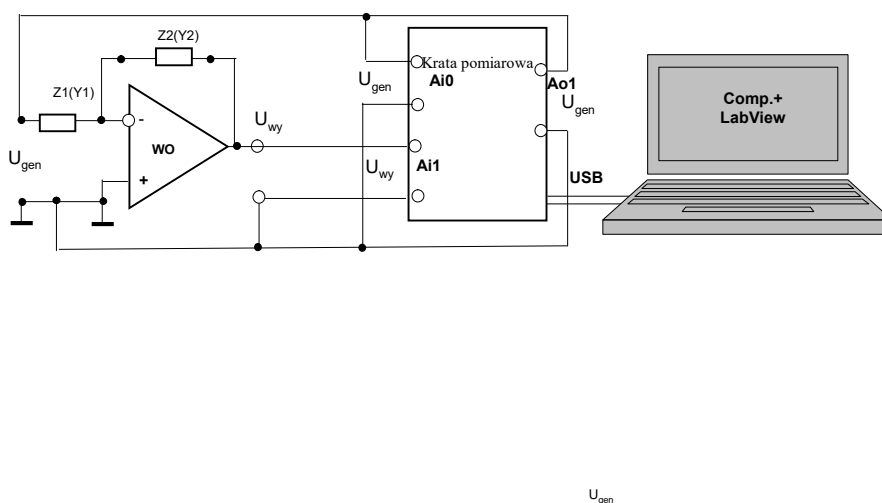
Obiekt pojemnościowy



- Rys. 12. Przykładowy układ strukturalny przetwarzania parametrów obiektu badanego indukcyjnego w napięcie z wykorzystaniem detekcji synchronicznej

15

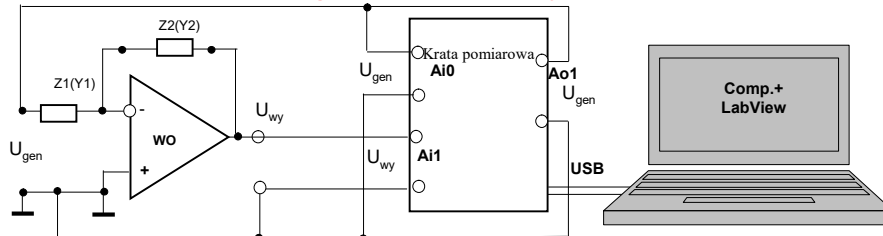
4. Wirtualne mierniki RLC z cyfrową detekcją synchroniczną



U_{gen}

16

4. Wirtualne mierniki RLC z cyfrową detekcją synchroniczną



Objekt badany jest zasilany napięciem harmonicznym U_{gen} z wyjścia analogowego Ao1 karty pomiarowej (KP), częstotliwości sygnału U_{gen} jest równa f .

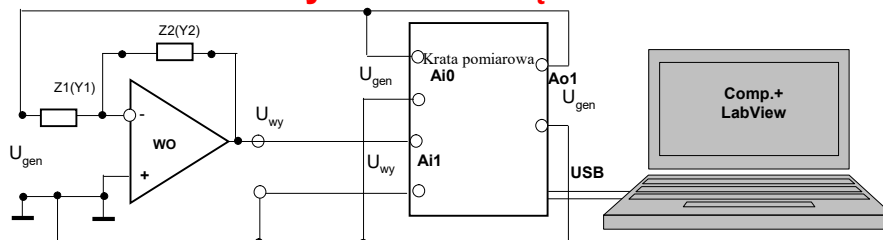
Sygnał zasilający (generatora U_{gen}) formowany jest najpierw w sposób cyfrowy, m próbek na okres sygnału,

tj. częstotliwość próbkowania przetwornika C/A: $f_{C/A} = m \cdot f$

Następnie podawany jest do wejścia przetwornika C/A, na wyjściu którego wykorzystuje się filtr wygładzający (na rysunku nie został pokazany), który wprowadza dodatkowe przesunięcie fazowe.

17

4. Wirtualne mierniki RLC z cyfrową detekcją synchroniczną



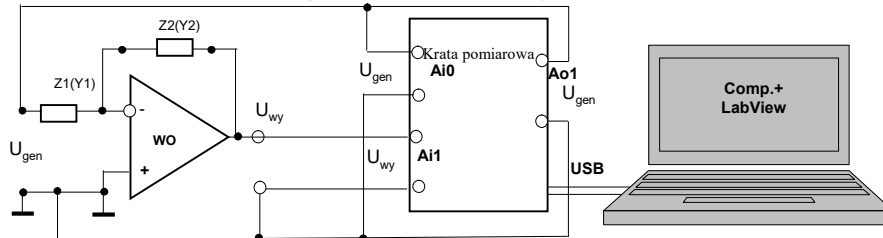
W celu eliminacji wpływu przesunięcia fazowego wprowadzanego przez filtr próbki $U_{gen,i}$ z wyjścia analogowego rejestrowane są w kanale wejścia analogowego Ai0.

Próbki napięcia $U_{x,i}$ z przetwornika analogowego (na wzmacniaczu operacyjnym) są rejestrowane na wejściu analogowym Ai1.

Częstotliwość próbkowania przetworników A/C $f_{A/C}$.

18

4. Wirtualne mierniki RLC z cyfrową detekcją synchroniczną



Z punktu widzenia opracowania sygnału najlepiej żeby częstotliwość próbkowania przetwornika A/C była równa częstotliwości próbkowania przetwornika C/A, tj.

$$f_{A/C} = f_{C/A} = m \cdot f$$

Na podstawie zarejestrowanych próbek są obliczane wartości parametrów obiektu badanego:

19

4. Wirtualne mierniki RLC z cyfrową detekcją synchroniczną

Na podstawie zarejestrowanych próbek są obliczane wartości parametrów obiektu badanego:

$$N_x = \sqrt{\sum_{i=1}^{k \cdot m} U_{x,i}^2} \quad N_g = \sqrt{\frac{1}{k \cdot m} \sum_{i=1}^{k \cdot m} U_{gen,i}^2} \quad N_{x,g} = \frac{1}{k \cdot m} \sum_{i=1}^{k \cdot m} U_{x,i} \cdot U_{gen,i}$$

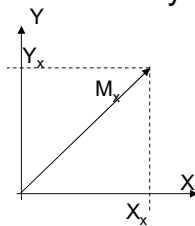
$$R_L \equiv \frac{N_{x,g}}{N_g^2} \cdot R_{ref} = \frac{1}{k \cdot m} \sum_{i=1}^{k \cdot m} U_{x,i} \cdot U_{gen,i} \cdot R_{ref} \cdot \frac{1}{\frac{1}{k \cdot m} \sum_{i=1}^{k \cdot m} U_{gen,i}^2} \quad L \equiv \frac{R_{ref}}{2\pi f} \cdot \frac{\sqrt{(N_x \cdot N_g)^2 - N_{x,g}^2}}{N_{gen}^2} = \frac{R_{ref}}{2\pi f} \cdot \frac{N_x}{N_{gen}} \sqrt{1 - \left(\frac{N_{x,g}}{N_x \cdot N_{gen}}\right)^2}$$

$$G_c \equiv \frac{N_{x,g}}{N_g^2} \cdot \frac{1}{R_{ref}} = \frac{1}{k \cdot m} \sum_{i=1}^{k \cdot m} U_{x,i} \cdot U_{gen,i} \cdot \frac{1}{R_{ref}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{k \cdot m} \sum_{i=1}^{k \cdot m} U_{gen,i}^2} \quad C \equiv \frac{1}{2\pi f \cdot R_{ref}} \cdot \frac{\sqrt{(N_x \cdot N_g)^2 - N_{x,g}^2}}{N_{gen}^2} = \frac{1}{2\pi f \cdot R_{ref}} \cdot \frac{N_x}{N_{gen}} \sqrt{1 - \left(\frac{N_{x,g}}{N_x \cdot N_{gen}}\right)^2}$$

20

5. Zasada metody pomiaru parametrów RLC na dwóch częstotliwościach

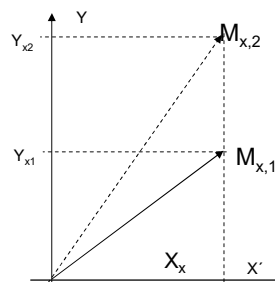
- Ta metoda odnosi się do metod impedancyjnych lub admitancyjnych, tj. bez pomiaru fazy.
- W tej metodzie mierzonym jest **tylko moduł** (długość) wektora (impedancja lub jej odwrotność admitancja)
- Pierwszy raz na **częstotliwości f1** sygnału wymuszającego. Wynik: $M_{x1} = \sqrt{X_x^2 + Y_{x1}^2}$



21

5. Zasada metody pomiaru parametrów RLC na dwóch częstotliwościach

- Następnie mierzono impedancję (lub admitancję) na **częstotliwości f2**. Wynik: $M_{x2} = \sqrt{X_x^2 + Y_{x2}^2}$



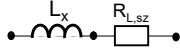
- Na podstawie obydwu wyników pomiaru impedancji lub admitancji oraz znajomości obydwu częstotliwości wyznaczane są parametry obiektów badanych.

22

4. Zasada metody pomiaru parametrów RLC na dwóch częstotliwościach.

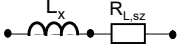
Obiekt indukcyjny

- Pierwszy pomiar impedancji na częstotliwości f_1 (szeregowego połączenia indukcyjności oraz rezystancji $R_{L,sz}$, L_x)



$$Z_{Lx,1} = \sqrt{(R_{L,sz})^2 + (\omega_1 \cdot L_x)^2}$$

- Drugi pomiar impedancji na częstotliwości f_2



$$Z_{Lx,2} = \sqrt{(R_{L,sz})^2 + (\omega_2 \cdot L_x)^2}$$

- Obliczenie Indukcyjności i rezystancji:

$$L_x = \sqrt{\frac{Z_{Lx,2}^2 - Z_{Lx,1}^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Z_{Lx,2}^2 - Z_{Lx,1}^2}{f_2^2 - f_1^2}}$$

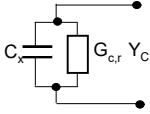
$$R_{Lx} = \sqrt{\frac{Z_{Lx,1}^2 \cdot f_2^2 - Z_{Lx,2}^2 \cdot f_1^2}{f_2^2 - f_1^2}}$$

23

4. Zasada metody pomiaru parametrów RLC na dwóch częstotliwościach.

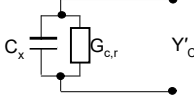
Obiekt pojemnościowy

- Pierwszy pomiar admittance na częstotliwości f_1 (równoległego połączenia kondensatora badanego C_x , G_C)



$$Y_C = \sqrt{G_{C,r}^2 + (\omega_1 \cdot C_x)^2}$$

- Pierwszy pomiar admittance na częstotliwości f_2



$$Y'_C = \sqrt{G_{C,r}^2 + (\omega_2 \cdot C_x)^2}$$

- Obliczenie pojemności i przewodności

$$C_x = \sqrt{\frac{Y_{Cx,2}^2 - Y_{Cx,1}^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Y_{Cx,2}^2 - Y_{Cx,1}^2}{f_2^2 - f_1^2}}$$

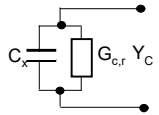
$$G_{Cx} = \sqrt{\frac{Y_{Cx,1}^2 \cdot f_2^2 - Y_{Cx,2}^2 \cdot f_1^2}{f_2^2 - f_1^2}} = \sqrt{\frac{Y_{Cx,1}^2 - Y_{Cx,2}^2 \cdot (f_1^2 / f_2^2)}{1 - (f_1^2 / f_2^2)}} = \sqrt{\frac{Y_{Cx,1}^2 - Y_{Cx,2}^2 \cdot k_f^2}{1 - k_f^2}}$$

$$k_f = f_1 / f_2$$

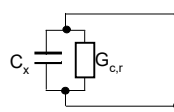
24

Zastosowanie metody do pomiaru parametrów obiektu pojemnościowego

- Pierwszy pomiar admitancji na częstotliwości f_1
- Pierwszy pomiar admitancji na częstotliwości f_2
- (równoległego połączenia kondensatora badanego C_x , G_C)



$$Y_C = \sqrt{G_{C,r}^2 + (\omega_1 \cdot C_x)^2}$$



$$Y'_C = \sqrt{(G_{C,r})^2 + (\omega_2 \cdot C_x)^2}$$

$$G_{C_x} = \sqrt{\frac{Y_{C_{x,1}}^2 \cdot f_2^2 - Y_{C_{x,2}}^2 \cdot f_1^2}{f_2^2 - f_1^2}} = \sqrt{\frac{Y_{C_{x,1}}^2 - Y_{C_{x,2}}^2 \cdot (f_1^2 / f_2^2)}{1 - (f_1^2 / f_2^2)}} = \sqrt{\frac{Y_{C_{x,1}}^2 - Y_{C_{x,2}}^2 \cdot k_f^2}{1 - k_f^2}}$$

$$k_f = f_1 / f_2$$

25

5. Wirtualne mierniki RLC na dwóch częstotliwościach

- **Wirtualne mierniki RLC** bazują na **kartach pomiarowych**, wyposażonych w wyjście analogowe (Ao) oraz wejściach analogowych (Ai) oraz komputerach z odpowiednim **środowiskiem programistycznym**, zapewniającym sterowanie wszystkimi procesami w karcie pomiarowej.
- Zwykle wykorzystuje się środowisko **LabView**.
- **Sygnał wymuszający** o zadanej częstotliwości wygenerowany jest **na wyjściu analogowym**.
- Tym sygnałem wymuszany jest obiekt badany.
- **Sygnąły odpowiedzi obiektu rejestrowane są na wejściach analogowych**.

5. Wirtualne mierniki RLC na dwóch częstotliwościach

- Zwykle **moduł** (długość) wektora impedancji mierzony jest pośrednio, na podstawie pomiarów **wartości skutecznej napięcia U_{RMS} i prądu I_{RMS}**

$$M_{x1} = Z_{x1} = \frac{U_{RMS,1}}{I_{RMS,1}}$$

- Z kolei **wartość prądu** też jest mierzona **pośrednio** poprzez pomiar spadku napięcia na rezystorze referencyjnym R_{ref} włączonym szeregowo do obiektu badanego :

$$I_{RMS} = \frac{U_{RMS,Rref}}{R_{ref}}$$

- Stąd **impedancja**:

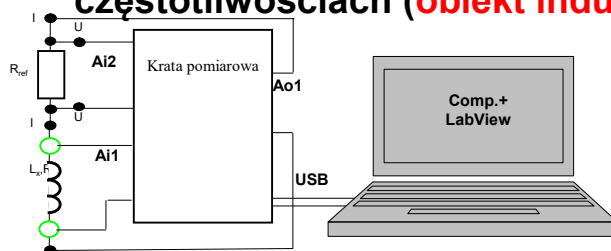
$$Z_{x1} = \frac{U_{RMS,1}}{I_{RMS,1}} = \frac{U_{RMS,1}}{U_{RMS,1,Rref}} R_{ref}$$

- Lub **admitancja**

$$Y_{x1} = \frac{1}{Z_{x1}} = \frac{U_{RMS,1,Rref}}{I_{RMS,1}} = \frac{U_{RMS,1,Rref}}{U_{RMS,1} R_{ref}}$$

27

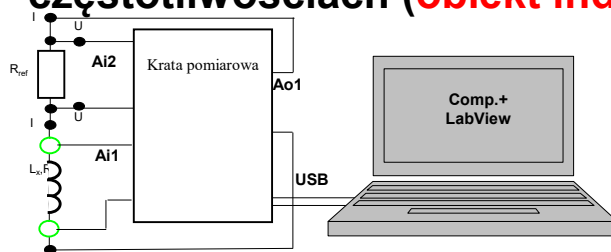
5. Wirtualne mierniki RLC na dwóch częstotliwościach (**obiekt indukcyjny**)



- W pierwszym pomiarze z wyjścia Ao1 karty pomiarowej (KP) sygnał o częstotliwości f_1 podawany jest do szeregowego połączenia obiektu (L_x) oraz rezystora referencyjnego (R_{ref}) (Filtr wygładzający na wyjściu Ao1 KP na rysunku nie został pokazany).
- Próbki napięcia z obiektu są rejestrowane na wejściu analogowym Ai1,**
- Próbki napięcia z rezystora referencyjnego R_{ref} są rejestrowane na wejściu analogowym Ai2**

28

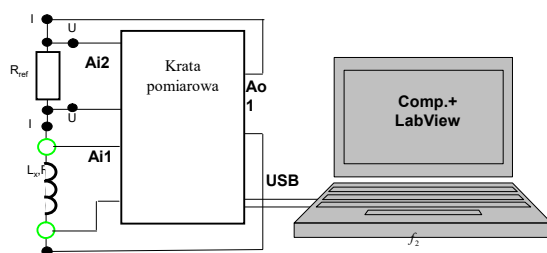
5. Wirtualne mierniki RLC na dwóch częstotliwościach (**obiekt indukcyjny**)



- Na podstawie zarejestrowanych próbek w odpowiedniej aplikacji wyznaczane są wartości skuteczne tych napięć i następnie impedancje:
$$Z_{Lx,1} = \frac{U_{Lx,1}}{U_{Rref,1}} R_{ref}$$
- W analogiczny sposób wykonywane są pomiary na częstotliwości sygnału wymuszającego f_2 i wyznaczana jest wartość impedancji
$$Z_{Lx,2} = \frac{U_{Lx,2}}{U_{Rref,2}} R_{ref}$$

29

5. Wirtualne mierniki RLC na dwóch częstotliwościach (**obiekt indukcyjny**)



- Wartość indukcyjności obiektu:

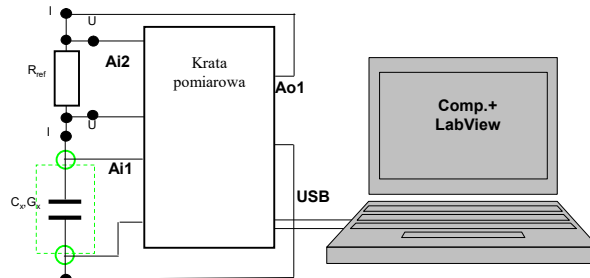
$$L_x = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Z_{Lx,2}^2 - Z_{Lx,1}^2}{f_2^2 - f_1^2}} = \frac{R_{ref}}{2\pi f_2} \sqrt{\frac{(U_{Lx,2}/U_{Rref,2})^2 - (U_{Lx,1}/U_{Rref,1})^2}{1 - (f_1/f_2)^2}}$$

- Oraz rezystancji:

$$R_{Lx} = \sqrt{\frac{Z_{Lx,1}^2 \cdot f_2^2 - Z_{Lx,2}^2 \cdot f_1^2}{f_2^2 - f_1^2}} = R_{ref} \sqrt{\frac{(U_{Lx,1}/U_{Rref,1})^2 - (U_{Lx,2}/U_{Rref,2})^2 \cdot (f_1/f_2)^2}{1 - (f_1/f_2)^2}}$$

30

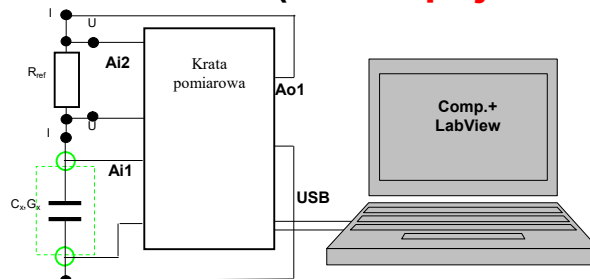
5. Wirtualne mierniki RLC na dwóch częstotliwościach (**obiekt pojemnościowy**)



- W pierwszym pomiarze z wyjścia Ao1 karty pomiarowej (KP) sygnał o częstotliwości f_1 podawany jest do szeregowego połączenia obiektu (C_x) oraz rezystora referencyjnego (R_{ref}).
- Próbki napięcia z obiektu są rejestrowane na wejściu analogowym Ai1,
- Próbki napięcia z rezystora referencyjnego są rejestrowane na wejściu analogowym Ai2

31

5. Wirtualne mierniki RLC na dwóch częstotliwościach (**obiekt pojemnościowy**)



- Na podstawie zarejestrowanych próbek w odpowiedniej aplikacji wyznaczone są wartości skuteczne tych napięć i następnie admitancję:

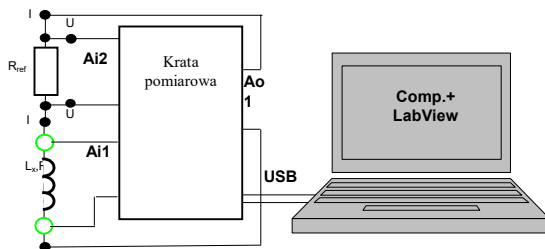
$$Y_{Cx,1} = \frac{U_{Rref,1}}{U_{Cx,1}} \frac{1}{R_{ref}}$$

- W analogiczny sposób wykonywane są pomiary na częstotliwości sygnału wymuszającego f_2 i wyznaczana jest wartość admittancji

$$Y_{Cx,2} = \frac{U_{Rref,2}}{U_{Cx,2}} \frac{1}{R_{ref}}$$

32

5. Wirtualne mierniki RLC na dwóch częstotliwościach (**obiekt indukcyjny**)



- Wartość pojemności obiektu:

$$C_x = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Y_{Cx,2}^2 - Y_{Cx,1}^2}{f_2^2 - f_1^2}} = \frac{1}{R_{ref} \cdot 2\pi f_2} \sqrt{\frac{(U_{Rref,2}/U_{Cx,2})^2 - (U_{Rref,1}/U_{Cx,1})^2}{1 - (f_1/f_2)^2}}$$

- Oraz przewodności:

$$G_{Cx} = \sqrt{\frac{Y_{Cx,1}^2 \cdot f_2^2 - Y_{Cx,2}^2 \cdot f_1^2}{f_2^2 - f_1^2}} = \frac{1}{R_{ref}} \sqrt{\frac{(U_{Rref,1}/U_{Cx,1})^2 - (U_{Rref,2}/U_{Cx,2})^2 \cdot (f_1/f_2)^2}{1 - (f_1/f_2)^2}}$$

33

6. Niepewność pomiaru RLC na dwóch częstotliwościach

- Niepewność wyników pomiaru zależy:
- od **niepewności pomiaru wartości skutecznych napięć na obiekcie oraz rezystorze referencyjnym**
- **częstotliwości** oraz
- **niepewności wartości R_{ref} .**
- W razie potrzeby do wyników wprowadzić poprawkę uwzględniającą parametry impedancji wejściowej mierników.

34

6. Niepewność pomiaru RLC na dwóch częstotliwościach (**Obiekt indukcyjny**)

- Niepewności wielkości:
- Rezystancji rezystora referencyjnego (gdzie $\delta_{Rref,gr}$ – względny maksymalny błąd rezystancji):

$$u_{B,rel}(R_{ref}) = \frac{\delta_{Rref,gr}}{\sqrt{3}}$$

- Częstotliwości (gdzie $\delta_{gen,gr}$ – względny maksymalny błąd dopuszczalny częstotliwości na wyjściu Ao1):

$$u_{B,rel}(f_1) = \frac{\delta_{gen,gr}}{\sqrt{3}}$$

$$u_{B,rel}(f_2) = u_{B,rel}(f_1) = \frac{\delta_{gen,gr}}{\sqrt{3}}$$

35

6. Niepewność pomiaru RLC na dwóch częstotliwościach (**Obiekt indukcyjny**)

- Niepewności wielkości:
- Wartości skutecznych napięć na obiekcie badanym i rezystorze:

$$u_{B,rel}(U_{Lx,1}) = \frac{a_{u1} + b_{u1} \cdot U_{n1} / U_{Lx,1}}{\sqrt{3}}$$

$$u_{B,rel}(U_{Rref,1}) = \frac{a_{u2} + b_{u2} \cdot U_{n,2} / U_{Rref,1}}{\sqrt{3}}$$

$$u_{B,rel}(U_{Lx,2}) = \frac{a_{u1} + b_{u1} \cdot U_{n1} / U_{Lx,2}}{\sqrt{3}}$$

$$u_{B,rel}(U_{Rref,2}) = \frac{a_{u2} + b_{u2} \cdot U_{n,2} / U_{Rref,2}}{\sqrt{3}}$$

- Gdzie a_{u1} , a_{u2} – względne wartości graniczne błędów wzmocnienia (gain error) w 1-m i 2-m kanałach KP;
- b_{u1} , b_{u2} – względne wartości graniczne błędów przesuwu zera (offset error) w 1-m i 2-m kanałach KP;
- U_{n1} , U_{n2} – zakresy napięciowe w 1-m i 2-m kanałach KP

36

6. Niepewność pomiaru RLC na dwóch częstotliwościach

- Podstawowy wzór na obliczanie indukcyjności:

$$L_x = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Z_{Lx,2}^2 - Z_{Lx,1}^2}{f_2^2 - f_1^2}} = \frac{R_{ref}}{2\pi} \sqrt{\frac{(U_{Lx,2}/U_{Rref,2})^2 - (U_{Lx,1}/U_{Rref,1})^2}{f_2^2 - f_1^2}} \quad V_{U^2} = (U_{Lx,2}/U_{Rref,2})^2 - (U_{Lx,1}/U_{Rref,1})^2$$

- Współczynniki wpływu niepewności wyników pomiaru wyznaczamy jako pochodne:

$$C_{R_{ref}} = \frac{\partial L_x}{\partial R_{ref}} = \frac{L_x}{R_{ref}} \quad C_{f_2} = \frac{\partial L_x}{\partial f_2} = -\frac{L_x f_2}{(f_2^2 - f_1^2)} \quad C_{f_1} = \frac{\partial L_x}{\partial f_1} = \frac{L_x f_1}{(f_2^2 - f_1^2)}$$

$$C_{U_{Lx,2}} = \frac{\partial L_x}{\partial U_{Lx,2}} = \frac{L_x}{((U_{Lx,2}/U_{Rref,2})^2 - (U_{Lx,1}/U_{Rref,1})^2)} \frac{U_{Lx,2}}{U_{Rref,2}^2} = \frac{L_x}{U_{Lx,2}} \cdot \frac{1}{V_{U^2}} \cdot \left(\frac{U_{Lx,2}}{U_{Rref,2}}\right)^2$$

$$C_{U_{Lx,1}} = \frac{\partial L_x}{\partial U_{Lx,1}} = \frac{-L_x}{((U_{Lx,2}/U_{Rref,2})^2 - (U_{Lx,1}/U_{Rref,1})^2)} \frac{U_{Lx,1}}{U_{Rref,1}^2} = \frac{-L_x}{U_{Lx,1}} \cdot \frac{1}{V_{U^2}} \cdot \left(\frac{U_{Lx,1}}{U_{Rref,1}}\right)^2$$

$$C_{U_{Rref,2}} = \frac{\partial L_x}{\partial U_{Rref,2}} = \frac{-L_x}{((U_{Lx,2}/U_{Rref,2})^2 - (U_{Lx,1}/U_{Rref,1})^2)} \frac{U_{Lx,2}^2}{U_{Rref,2}^3} = \frac{-L_x}{U_{Lx,2}} \cdot \frac{1}{V_{U^2}} \cdot \left(\frac{U_{Lx,2}}{U_{Rref,2}}\right)^2$$

$$C_{U_{Rref,1}} = \frac{\partial L_x}{\partial U_{Rref,1}} = \frac{L_x}{((U_{Lx,2}/U_{Rref,2})^2 - (U_{Lx,1}/U_{Rref,1})^2)} \frac{U_{Lx,1}^2}{U_{Rref,1}^3} = \frac{L_x}{U_{Lx,1}} \cdot \frac{1}{V_{U^2}} \cdot \left(\frac{U_{Lx,1}}{U_{Rref,1}}\right)^2$$

37

6. Niepewność pomiaru RLC na dwóch częstotliwościach

- Wtedy złożona względna niepewność wyniku pomiaru indukcyjności

$$u_{c,rel}(L_x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\delta_{Rref,gr}^2 + \frac{f_1^4 + f_2^2}{(f_2^2 - f_1^2)} \delta_{f_{gen,gr}}^2 + \frac{1}{V_U^2} \left(\frac{U_{Lx1}}{U_{Rref1}}\right)^4 [(a_{u1} + b_{u1} \cdot U_{n1}/U_{Lx1})^2 + (a_{u2} + b_{u2} \cdot U_{n2}/U_{Rref1})^2] + \frac{1}{V_U^2} \left(\frac{U_{Lx2}}{U_{Rref2}}\right)^4 [(a_{u1} + b_{u1} \cdot U_{n1}/U_{Lx2})^2 + (a_{u2} + b_{u2} \cdot U_{n2}/U_{Rref2})^2]}$$

- Złożona bezwzględna niepewność wyniku pomiaru indukcyjności

$$u_c(L_x) = \frac{L_x u_{c,rel}(L_x)}{100\%}$$

38

6. Niepewność pomiaru RLC na dwóch częstotliwościach

- Podstawowy wzór na obliczanie rezystancji :

$$R_{Lx} = \sqrt{\frac{Z_{Lx,1}^2 \cdot f_2^2 - Z_{Lx,2}^2 \cdot f_1^2}{f_2^2 - f_1^2}} = R_{ref} \sqrt{\frac{(U_{Lx,1}/U_{Rref,1})^2 f_2^2 - (U_{Lx,2}/U_{Rref,2})^2 \cdot f_1^2}{f_2^2 - f_1^2}} =$$

$$= R_{ref} \sqrt{\frac{V_{U1}^2 f_2^2 - V_{U2}^2 f_1^2}{f_2^2 - f_1^2}}, \quad V_{U1} = \frac{U_{Lx,1}}{U_{Rref,1}}; V_{U2} = \frac{U_{Lx,2}}{U_{Rref,2}}.$$

- Współczynniki wpływu niepewności wyników pomiaru wyznaczamy jako pochodne $C_{R_{ref}} = \frac{\partial R_{Lx}}{\partial R_{ref}} = \frac{R_{Lx}}{R_{ref}}$

$$C_{f_1} = \frac{\partial R_{Lx}}{\partial f_1} = \frac{L_x}{f_1} \cdot \frac{f_1^2 f_2^2}{f_2^2 - f_1^2} \cdot \frac{V_{U1}^2 - V_{U2}^2}{V_{U1}^2 f_2^2 - V_{U2}^2 f_1^2} \quad C_{f_2} = \frac{\partial R_{Lx}}{\partial f_2} = \frac{L_x}{f_2} \cdot \frac{f_1^2 f_2^2}{f_2^2 - f_1^2} \cdot \frac{-(V_{U1}^2 - V_{U2}^2)}{V_{U1}^2 f_2^2 - V_{U2}^2 f_1^2}$$

$$C_{U_{Lx,1}} = \frac{\partial R_{Lx}}{\partial U_{Lx,1}} = \frac{L_x}{U_{Lx,1}} \cdot \frac{V_{U1}^2 f_2^2}{V_{U1}^2 f_2^2 - V_{U2}^2 f_1^2} \quad C_{U_{Rref,1}} = \frac{\partial R_{Lx}}{\partial U_{Rref,1}} = \frac{-L_x}{U_{Rref,1}} \cdot \frac{V_{U1}^2 f_2^2}{V_{U1}^2 f_2^2 - V_{U2}^2 f_1^2}$$

$$C_{U_{Lx,2}} = \frac{\partial R_{Lx}}{\partial U_{Lx,2}} = \frac{-L_x}{U_{Lx,2}} \cdot \frac{V_{U2}^2 f_1^2}{V_{U1}^2 f_2^2 - V_{U2}^2 f_1^2} \quad C_{U_{Rref,2}} = \frac{\partial R_{Lx}}{\partial U_{Rref,2}} = \frac{L_x}{U_{Rref,2}} \cdot \frac{V_{U2}^2 f_1^2}{V_{U1}^2 f_2^2 - V_{U2}^2 f_1^2}$$

39

6. Niepewność pomiaru RLC na dwóch częstotliwościach

- Złożona względna niepewność wyniku pomiaru rezystancji

$$u_{c,rel}(R_{Lx}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\delta_{Rref,gr}^2 + 2 \left(\frac{f_1^2 f_2^2}{f_2^2 - f_1^2} \cdot \frac{V_{U1}^2 - V_{U2}^2}{V_{U1}^2 f_2^2 - V_{U2}^2 f_1^2} \right)^2 \delta_{gen,gr}^2 + \left(\frac{V_{U1}^2 f_2^2}{V_{U1}^2 f_2^2 - V_{U2}^2 f_1^2} \right)^2 [(a_{u1} + b_{u1} \cdot U_{n1}/U_{Lx1})^2 + (a_{u2} + b_{u2} \cdot U_{n2}/U_{Rref1})^2] + \left(\frac{V_{U2}^2 f_1^2}{V_{U1}^2 f_2^2 - V_{U2}^2 f_1^2} \right)^2 [(a_{u1} + b_{u1} \cdot U_{n1}/U_{Lx2})^2 + (a_{u2} + b_{u2} \cdot U_{n2}/U_{Rref2})^2]}.$$

- Złożona bezwzględna niepewność wyniku pomiaru rezystancji

$$u_c(R_{Lx}) = \frac{R_{Lx} u_{c,rel}(R_{Lx})}{100\%}$$

40

7. Przykład. Pomiary indukcyjności

- Podczas pomiaru indukcyjności uzyskano wyniki:
- Częstotliwość $f_1=1.0004$ kHz, $f_2=1.9995$ kHz, $R_{ref}=10$ Ω
- Wartości skuteczne napięć:
- $U_{Lx,1}=6.894$ Vrms, $U_{Lx,2}=6.973$ Vrms, (zakres $U_{n1}=10V$)
- $U_{Rref,1}=0.5416$ Vrms, $U_{Rref,2}=0.2766$ Vrms, (zakres $U_{n2}=1V$)
- Wartość indukcyjności:

$$L_x = \frac{R_{ref}}{2\pi} \sqrt{\frac{(U_{Lx,2}/U_{Rref,2})^2 - (U_{Lx,1}/U_{Rref,1})^2}{f_2^2 - f_1^2}} = 0.02004 \text{ H} = 20.04 \text{ mH}$$

- Wartość rezystancji:

$$R_{Lx} = R_{ref} \sqrt{\frac{(U_{Lx,1}/U_{Rref,1})^2 f_2^2 - (U_{Lx,2}/U_{Rref,2})^2 f_1^2}{f_2^2 - f_1^2}} = 19.795 \Omega$$

41

7. Przykład. Pomiary indukcyjności

- Wartości $\delta_{Rref,gr}=0.01\%$, $\delta_{gen,gr}=0.01\%$
- $a_{u1}=0.02\%$ $b_{u1}=0.02\%$, $a_{u2}=0.02\%$ $b_{u2}=0.02\%$
- Względna standardowa niepewność indukcyjności:

$$u_{c,rel}(L_x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\delta_{Rref,gr}^2 + \frac{f_1^4 + f_2^2}{(f_2^2 - f_1^2)^2} \delta_{gen,gr}^2 + \frac{1}{V_U^2} \left(\frac{U_{Lx1}}{U_{Rref1}}\right)^4 \left[(a_{u1} + b_{u1} \cdot U_{n1}/U_{Lx1})^2 + (a_{u2} + b_{u2} \cdot U_{n2}/U_{Rref1})^2 \right] + \frac{1}{V_U^2} \left(\frac{U_{Lx2}}{U_{Rref2}}\right)^4 \left[(a_{u1} + b_{u1} \cdot U_{n1}/U_{Lx2})^2 + (a_{u2} + b_{u2} \cdot U_{n2}/U_{Rref2})^2 \right]} = 0.084\%$$

- Bezwzględna standardowa niepewność indukcyjności:

$$u_c(L_x) = \frac{L_x u_{c,rel}(L_x)}{100\%} = 0.017 \text{ mH}$$

42

7. Przykład. Pomiary indukcyjności

- Wartości $\delta_{\text{Ref,gr}} = 0.01\%$, $\delta_{\text{gen,gr}} = 0.01\%$
- $a_{u1} = 0.02\%$ $b_{u1} = 0.02\%$, $a_{u2} = 0.02\%$ $b_{u2} = 0.02\%$
- Względna standardowa niepewność rezystancji:

$$u_{c,rel}(R_{Lx}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\delta_{\text{Ref,gr}}^2 + 2 \left(\frac{f_1^2 f_2^2}{f_2^2 - f_1^2} \cdot \frac{V_{U1}^2 - V_{U2}^2}{V_{U1}^2 f_2^2 - V_{U2}^2 f_1^2} \right)^2 \delta_{\text{gen,gr}}^2 + \left(\frac{V_{U1}^2 f_2^2}{V_{U1}^2 f_2^2 - V_{U2}^2 f_1^2} \right)^2 \left[(a_{u1} + b_{u1} \cdot U_{n1} / U_{Lx1})^2 + (a_{u2} + b_{u2} \cdot U_{n2} / U_{\text{Ref1}})^2 \right] + \left(\frac{V_{U2}^2 f_1^2}{V_{U1}^2 f_2^2 - V_{U2}^2 f_1^2} \right)^2 \left[(a_{u1} + b_{u1} \cdot U_{n1} / U_{Lx2})^2 + (a_{u2} + b_{u2} \cdot U_{n2} / U_{\text{Ref2}})^2 \right]} = 4.14\%$$

- Bezwzględna standardowa niepewność rezystancji :

$$u_c(R_{Lx}) = \frac{R_{Lx} u_{c,rel}(R_{Lx})}{100\%} = 0.82 \Omega$$

43

7. Przykład. Pomiary indukcyjności

- **Wnioski:**
- Jak widać z uzyskanych wyników, metoda pomiaru na 2-
ch częstotliwościach , (w przykładzie 1 kHz i 2 kHz)
zapewnia **dobrą dokładność pomiaru indukcyjności**,
Jednak **bardzo niska dokładność pomiaru rezystancji**.

Podobne wyniki uzyskują się podczas pomiaru parametrów
obiektu pojemnościowego.

44

7. Przykład

- Wartości $\delta_{Ref,gr} = 0.01\%$, $\delta_{gen,gr} = 0.01\%$
- $a_{u1} = 0.02\%$ $b_{u1} = 0.02\%$, $a_{u2} = 0.02\%$ $b_{u2} = 0.02\%$
- Względna standardowa niepewność rezystancji:

$$u_{c,rel}(R_{Lx}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\delta_{Ref,gr}^2 + 2 \left(\frac{f_1^2 f_2^2}{f_2^2 - f_1^2} \cdot \frac{V_{U1}^2 - V_{U2}^2}{V_{U1}^2 f_2^2 - V_{U2}^2 f_1^2} \right)^2 \delta_{gen,gr}^2 + \left(\frac{V_{U1}^2 f_2^2}{V_{U1}^2 f_2^2 - V_{U2}^2 f_1^2} \right)^2 \left[(a_{u1} + b_{u1} \cdot U_{n1} / U_{Lx1})^2 + (a_{u2} + b_{u2} \cdot U_{n2} / U_{Ref1})^2 \right] + \left(\frac{V_{U2}^2 f_1^2}{V_{U1}^2 f_2^2 - V_{U2}^2 f_1^2} \right)^2 \left[(a_{u1} + b_{u1} \cdot U_{n1} / U_{Lx2})^2 + (a_{u2} + b_{u2} \cdot U_{n2} / U_{Ref2})^2 \right]} = 4.14\%$$

- Bezwzględna standardowa niepewność rezystancji :

$$u_c(R_{Lx}) = \frac{R_{Lx} u_{c,rel}(R_{Lx})}{100\%} = 0.82 \Omega$$