Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa

Rachunek prawdopodobieństwa pomaga obliczyć szansę zaistnienia pewnego określonego zdarzenia. Żeby obliczyć szansę dowolnego zdarzenia (nazwijmy go literką A), musimy określić liczbę zdarzeń sprzyjających oraz liczbę wszystkich możliwych zdarzeń (do tego celu stosujemy kombinatorykę). Następnie do obliczenia prawdopodobieństwa korzystamy z jednego wzoru:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

gdzie:

|A| - to liczba zdarzeń sprzyjających (moc zbioru |A|), |Ω| - to liczba wszystkich możliwych zdarzeń (moc zbioru |Ω|)

Pojęcia stosowane w rachunku prawdopodobieństwa:

Doświadczenie losowe - czynność którą wykonujemy, np.: rzut kostką, wybór dnia tygodnia.
Zdarzenie elementarne - zdarzenie (tylko jedno!) jakie może wydarzyć się w doświadczeniu losowym, np.: wypadło 5 oczek, wybrano środę.
Zdarzenie losowe - zbiór jednego lub kilku zdarzeń elementarnych, np.: wypadła parzysta liczba oczek (2, 4, lub 6), wybrano dzień powszedni.
Moc zbioru - liczba elementów danego zbioru, np.: $|\{2,4,6\}|=3$, $|\{\text{dni powszednie}\}|=5$.
Stosowane oznaczenia:
Ω - zbiór wszystkich zdarzeń elementarnych doświadczenia losowego
A - zdarzenie losowe (podzbiór Ω)

Własności prawdopodobieństwa:

- Prawdopodobieństwo dowolnego zdarzenia losowego A jest zawsze liczbą z przedziału ⟨0;1⟩.
$$0 \le P(A) \le 1$$
- Prawdopodobieństwo zdarzenia pewnego jest równe 1.
$$P(\Omega) = 1$$
- Prawdopodobieństwo zdarzenia niemożliwego jest równe 0.
$$P(\emptyset) = 1$$

Przydatne wzory:

- Prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego:

$$P(A')=1-P(A)$$

- Prawdopodobieństwo sumy zdarzeń

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

- Prawdopodobieństwo warunkowe:

Prawdopodobieństwo warunkowe zajścia zdarzenia A pod warunkiem zajścia zdarzenia B liczymy ze wzoru (pod warunkiem, że P(B) > 0):

$$P(A|B)=P(A\cap B)P(B)$$

Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym:

Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym – w teorii prawdopodobieństwa, twierdzenie pozwalające na obliczanie prawdopodobieństw zdarzeń, które mogą zajść w konsekwencji zajścia innych zdarzeń, takich jak doświadczenia wieloetapowe.

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B/A_i) \cdot P(A_i)$$

gdzie: A_i – „n" wyłączających się wzajemnie zdarzeń losowych, B – zdarzenie losowe, które można przedstawić jako sumę iloczynów $B \cdot A_i$ (i = 1,2,...,n)

Twierdzenie to pozwala wyrazić prawdopodobieństwo zdarzenia losowego B za pomocą prawdopodobieństwa warunkowego jego zajścia względem zdarzeń wzajemnie wyłączających się i wyczerpujących cały zbiór zdarzeń elementarnych.

Twierdzenie Bayesa:

Twierdzenie to pozwala na określenie prawdopodobieństwa „a posteriori" (po fakcie) zdarzenia A_j, pod warunkiem zajścia zdarzenia B, jeśli znane są prawdopodobieństwa „a priori" (wstępne) zdarzeń A_i i prawdopodobieństwo warunkowe $P(B/A_j)$ (założone):

$$P(A_j/B) = \frac{P(A_j) \cdot P(B/A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B/A_i) \cdot P(A_i)}$$

W sposób opisowy:

$$P(stanu/próby) = \frac{P(stanu) \cdot P(próby/stanu)}{\sum_{i=1}^{n} P(próby/stanu) \cdot P(stanu)}$$

Ograniczenia:

A_i – zdarzenia wyłączające się

A_i - spełniają założenia twierdzenia o prawdopodobieństwie całkowitym

P(B) > 0

TWIERDZENIE BAYESA

Przykład zastosowania tw. Bayesa:

- Na podstawie badań próbek betonu w czasie budowy, jego wytrzymałość sklasyfikowano jako:

Zdarzenie	Stan f_{cm} [MPa]	Prawd. „a priori" (wstępne)
A_1	10 ÷ 20	$P(A_1) = 0{,}30$
A_2	21 ÷ 25	$P(A_2) = 0{,}25$
A_3	26 ÷ 30	$P(A_3) = 0{,}40$
A_4	31 ÷ 40	$P(A_4) = 0{,}05$
		$\Sigma = 1{,}00$

A_i (A_1, A_2, A_3, A_4), $n = 4$
$P(A_i)$ – prawd. wystąpienia wytrzymałości f_{cm} w odpowiednim przedziale (na podstawie badań próbek z okresu budowy)

- W celu ustalenia faktycznej wytrzymałości średniej pobrano (kolejno) próbki z konstrukcji i określono wytrzymałości – zdarzenie B

Wyniki badań są obarczone błędami (pobór próbki, przygotowanie, badanie, itp.) i należy określić zaufanie do nich, czyli prawdopodobieństwo, że wytrzymałość betonu odpowiada wynikowi próby, że jest ona większa lub mniejsza od rzeczywistej, tzn. $P(B/A_i)$

Wytrz. pobranej próbki (B/A_i)	$P(B/A_i)$				
	A_1	A_2	A_3	A_4	
$(10 \div 20)A_1$	0,85	0,10	0,05	0,00	$\Sigma = 1{,}00$
$(21 \div 25)A_2$	0,10	0,80	0,10	0,00	$\Sigma = 1{,}00$
$(26 \div 30)A_3$	0,05	0,10	0,80	0,05	$\Sigma = 1{,}00$
$(31 \div 40)A_4$	0,00	0,05	0,10	0,85	$\Sigma = 1{,}00$

Rozwiązanie:

- Badanie pierwsze: $f_{cm} = 23\ MPa \in (21 \div 25\ MPa)$

$$P(A_1/23) = \frac{P(A_1)\cdot P(B/A_1)}{\sum_{i=1}^{n=4} P(B/A_i)\cdot P(A_i)} = \frac{0{,}30\cdot 0{,}10}{0{,}10\cdot 0{,}30 + 0{,}80\cdot 0{,}25 + 0{,}1\cdot 0{,}40 + 0{,}00\cdot 0{,}05} = 0{,}111$$

$$P(A_2/23) = \frac{P(A_2)\cdot P(B/A_2)}{\sum_{i=1}^{n=4} P(B/A_i)\cdot P(A_i)} = \frac{0{,}25\cdot 0{,}80}{0{,}10\cdot 0{,}30 + 0{,}80\cdot 0{,}25 + 0{,}1\cdot 0{,}40 + 0{,}00\cdot 0{,}05} = 0{,}741$$

$$P(A_3/23) = \frac{P(A_3)\cdot P(B/A_3)}{\sum_{i=1}^{n=4} P(B/A_i)\cdot P(A_i)} = \frac{0{,}40\cdot 0{,}10}{0{,}10\cdot 0{,}30 + 0{,}80\cdot 0{,}25 + 0{,}1\cdot 0{,}40 + 0{,}00\cdot 0{,}05} = 0{,}148$$

$$P(A_4/23) = \frac{P(A_4)\cdot P(B/A_4)}{\sum_{i=1}^{n=4} P(B/A_i)\cdot P(A_i)} = \frac{0{,}05\cdot 0{,}0}{0{,}10\cdot 0{,}30 + 0{,}80\cdot 0{,}25 + 0{,}1\cdot 0{,}40 + 0{,}00\cdot 0{,}05} = 0$$

Zestawienie prawd. „a priori" i „a posteriori" po uwzględnieniu kolejnych wyników badań:

Zdarzenie	Stan f_{cm} [MPa]	$P(A_i)$ „a priori"	$P(A_i)$ „a posteriori" po j-tej próbie		
			1	2	3
A_1	10 ÷ 20	$P(A_1) = 0{,}30$	0,111	...	...
A_2	21 ÷ 25	$P(A_2) = 0{,}25$	0,741	...	...
A_3	26 ÷ 30	$P(A_3) = 0{,}40$	0,148	...	...
A_4	31 ÷ 40	$P(A_4) = 0{,}05$	0,00	...	...
		$\Sigma = 1{,}00$	$\Sigma = 1{,}00$		

- Badanie drugie: $f_{cm} = 28\ MPa \in (26 \div 30\ MPa)$

$$P(A_1/28) = \frac{P(A_1)\cdot P(B/A_1)}{\sum_{i=1}^{n=4} P(B/A_i)\cdot P(A_i)} = \frac{0{,}111\cdot 0{,}05}{0{,}111\cdot 0{,}05 + 0{,}741\cdot 0{,}10 + 0{,}148\cdot 0{,}80 + 0{,}00\cdot 0{,}05}$$
$= 0{,}028$

$$P(A_2/28) = \frac{P(A_2)\cdot P(B/A_2)}{\sum_{i=1}^{n=4} P(B/A_i)\cdot P(A_i)} = \frac{0{,}741\cdot 0{,}10}{0{,}111\cdot 0{,}05 + 0{,}741\cdot 0{,}10 + 0{,}148\cdot 0{,}80 + 0{,}00\cdot 0{,}05}$$
$= 0{,}374$

$$P(A_3/28) = \frac{P(A_3)\cdot P(B/A_3)}{\sum_{i=1}^{n=4} P(B/A_i)\cdot P(A_i)} = \frac{0{,}148\cdot 0{,}80}{0{,}111\cdot 0{,}05 + 0{,}741\cdot 0{,}10 + 0{,}148\cdot 0{,}80 + 0{,}00\cdot 0{,}05}$$
$= 0{,}598$

$$P(A_4/28) = \frac{P(A_4)\cdot P(B/A_4)}{\sum_{i=1}^{n=4} P(B/A_i)\cdot P(A_i)} = \frac{0{,}00\cdot 0{,}05}{0{,}111\cdot 0{,}05 + 0{,}741\cdot 0{,}10 + 0{,}148\cdot 0{,}80 + 0{,}00\cdot 0{,}05}$$
$= 0$

Zestawienie prawd. „a priori" i „a posteriori" po uwzględnieniu kolejnych wyników badań:

Zdarzenie	Stan f_{cm} [MPa]	P (A_i) „a priori"	P (A_i) „a posteriori" po j-tej próbie 1	2	3
A_1	10 ÷ 20	$P(A_1) = 0{,}30$	0,111	0,028	...
A_2	21 ÷ 25	$P(A_2) = 0{,}25$	0,741	0,374	...
A_3	26 ÷ 30	$P(A_3) = 0{,}40$	0,148	0,598	...
A_4	31 ÷ 40	$P(A_4) = 0{,}05$	0,00	0,00	...
		Σ = 1,00	Σ = 1,00	Σ = 1,00	

Kolejno badanie trzecie,... , aż uzyskamy akceptowalną dokładność (zbieżność wyników).

- Badanie trzecie: $f_{cm} = 29\ MPa \in (26 \div 30\ MPa)$

$$P(A_1/29) = \frac{P(A_1)\cdot P(B/A_1)}{\sum_{i=1}^{n=4} P(B/A_i)\cdot P(A_i)} = \frac{0{,}028\cdot 0{,}05}{0{,}028\cdot 0{,}05 + 0{,}374\cdot 0{,}10 + 0{,}598\cdot 0{,}80 + 0{,}00\cdot 0{,}05}$$
$= 0{,}003$

$$P(A_2/29) = \frac{P(A_2)\cdot P(B/A_2)}{\sum_{i=1}^{n=4} P(B/A_i)\cdot P(A_i)} = \frac{0{,}374\cdot 0{,}10}{0{,}028\cdot 0{,}05 + 0{,}374\cdot 0{,}10 + 0{,}598\cdot 0{,}80 + 0{,}00\cdot 0{,}05}$$
$= 0{,}072$

$$P(A_3/29) = \frac{P(A_3)\cdot P(B/A_3)}{\sum_{i=1}^{n=4} P(B/A_i)\cdot P(A_i)} = \frac{0{,}598\cdot 0{,}80}{0{,}028\cdot 0{,}05 + 0{,}374\cdot 0{,}10 + 0{,}598\cdot 0{,}80 + 0{,}00\cdot 0{,}05}$$
$= 0{,}925$

$$P(A_4/29) = \frac{P(A_4)\cdot P(B/A_4)}{\sum_{i=1}^{n=4} P(B/A_i)\cdot P(A_i)} = \frac{0{,}00\cdot 0{,}05}{0{,}028\cdot 0{,}05 + 0{,}374\cdot 0{,}10 + 0{,}598\cdot 0{,}80 + 0{,}00\cdot 0{,}05}$$
$= 0$

Zestawienie prawd. „a priori" i „a posteriori" po uwzględnieniu kolejnych wyników badań:

Zdarzenie	Stan f_{cm} [MPa]	P (A_i) „a priori"	P (A_i) „a posteriori" po j-tej próbie		
			1	2	3
A_1	$10 \div 20$	$P(A_1) = 0,30$	0,111	0,028	0,003
A_2	$21 \div 25$	$P(A_2) = 0,25$	0,741	0,374	0,072
A_3	$26 \div 30$	$P(A_3) = 0,40$	0,148	0,598	0,925
A_4	$31 \div 40$	$P(A_4) = 0,05$	0,00	0,00	0
		$\Sigma = 1,00$	$\Sigma = 1,00$	$\Sigma = 1,00$	$\Sigma = 1,00$

W badaniu trzecim dla wyniku $f_{cm} = 29\ MPa$ uzyskano wartość prawdopodobieństwa „a posteriori" na poziomie 0,925 co jest wynikiem dającym dużą zbieżność wyników i może wskazywać na wystarczającą liczbę prób. Zatem należy wnioskować, że faktyczna wytrzymałość średnia znajduje się w przedziale $26 \div 30$ MPa.