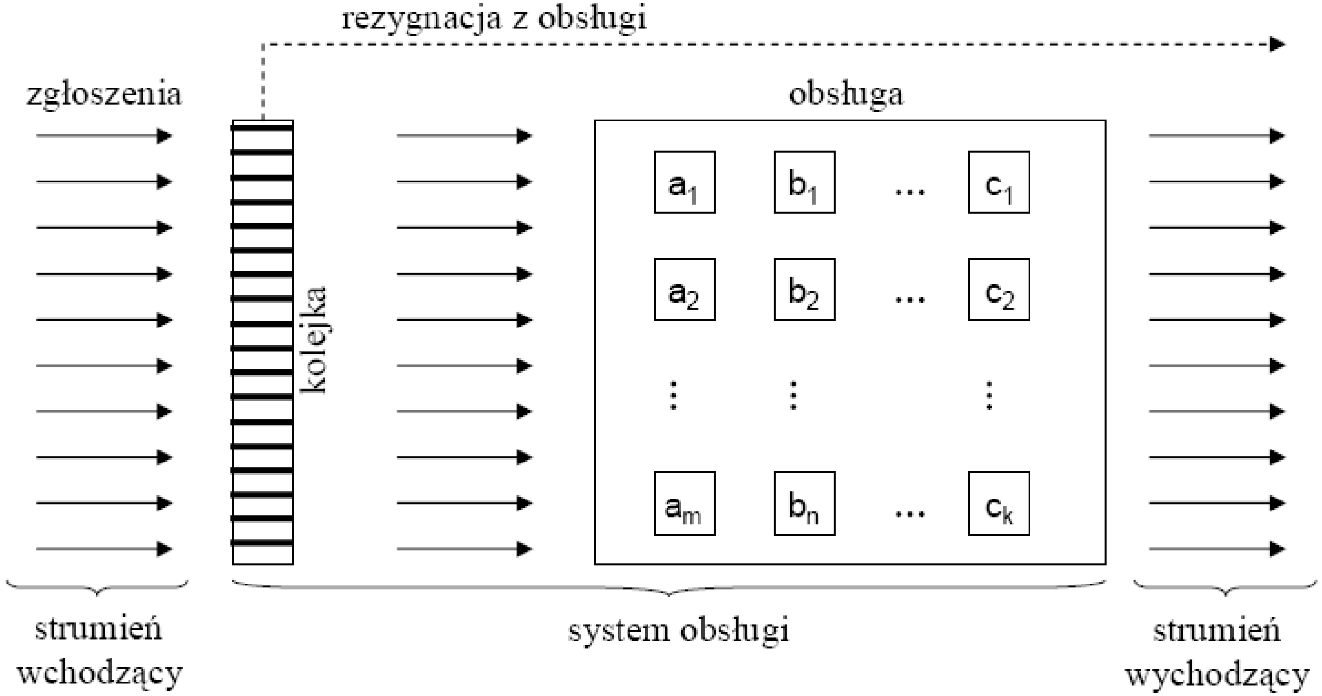
Podstawowe definicje (1)

Proces masowej obsługi – proces składający się z:

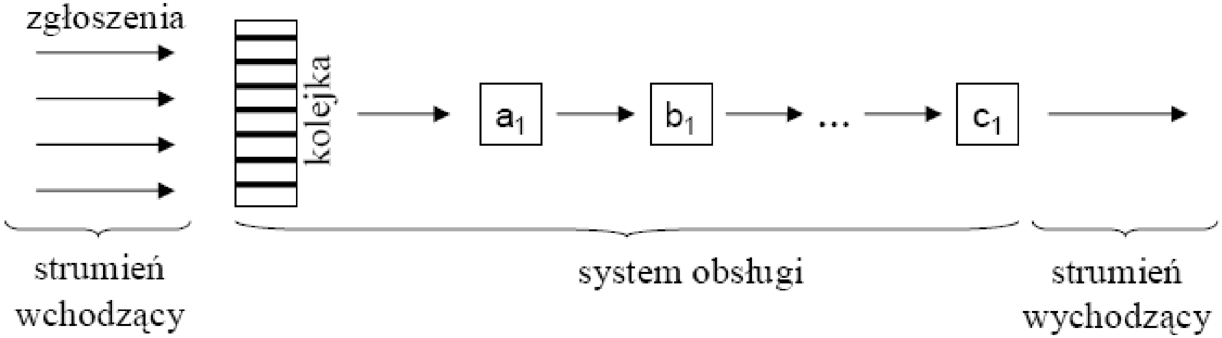
- strumień wchodzący (strumień wejściowy, strumień zgłoszeń) – zgłoszenia nadchodzące do systemu;
- system obsługi (kanały obsługi, aparaty obsługi) – zbiór urządzeń lub stanowisk świadczących obsługę zgłoszenia wraz z kolejką zgłoszeń oczekujących na obsługę;
- strumień wychodzący (strumień wyjściowy) – zbiór zgłoszeń po obsłużeniu oraz zbiór zgłoszeń, które zrezygnowały z obsługi.



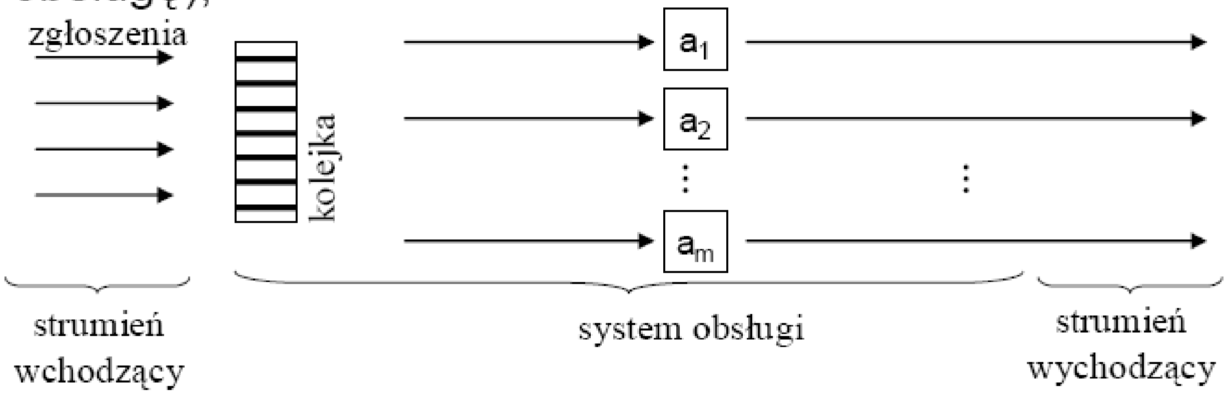
Podstawowe definicje (2)

<u>Klasyfikacja systemów masowej obsługi ze względu na organizację obsługi</u>:

- **szeregowe** (obsługa zgłoszenia w kilku kanałach w ściśle określonej kolejności);



- **równoległe** (obsługa w jednym z kilku kanałów realizujących taką samą obsługę);



- **mieszane** (obsługa w kolejnych podsystemach szeregowych lub równoległych).

Podstawowe definicje (3)

<u>Klasyfikacja systemów masowej obsługi ze względu na zachowanie się zgłoszenia</u>:

- **ze stratami** (zgłoszenie opuszcza po upływie pewnego czasu system rezygnując z obsługi);
- **bez strat** (zgłoszenie w systemie przebywa do czasu obsłużenia).

<u>Klasyfikacja systemów masowej obsługi ze względu na rozmiary i istnienie kolejki</u>:

- systemy z kolejką **ograniczoną** lub **nieograniczoną**;

Podstawowe definicje (4)

Klasyfikacja systemów masowej obsługi ze względu na organizację kolejki (regulamin kolejki):

- **FIFO** – ***First In First Out*** (zgłoszenie stojące na pierwszym miejscu w kolejce jest obsługiwane jako pierwsze – „kolejka naturalna”);

- **LIFO** – ***Last In First Out*** (zgłoszenie stojące na ostatnim miejscu w kolejce jest obsługiwane jako pierwsze);

- **SIRO** – ***Selection In Random Order*** (losowy dobór zgłoszenia do obsługi);

- Obsługa **z priorytetem** (pierwszeństwo dla zgłoszeń „uprzywilejowanych”).

Charakterystyki liczbowe systemów masowej obsługi (1)

1. Strumień zgłoszeń

➢ **stopa zgłoszeń** (liczba zgłoszeń napływających do systemu obsługi w ustalonej jednostce czasu (średnio λ)

➢ **intensywność zgłoszeń** (odstęp czasu pomiędzy kolejnymi zgłoszeniami (średnio $1/\lambda$)

2. Obsługa

➢ **stopa obsługi** (liczba zgłoszeń obsługiwanych w ustalonej jednostce czasu (średnio μ)

➢ **intensywność obsługi** (czasu obsługi zgłoszenia przez jeden z ***s*** równoległych kanałów obsługi (średnio $1/\mu$)

Charakterystyki liczbowe systemów masowej obsługi (2)

3. Proces obsługi

➢ **intensywność ruchu** (stała Erlanga – iloraz średniej liczby zgłoszeń jaka napływa do systemu w jednostce czasu do średniej liczby zgłoszeń jaka może być obsłużona w jednostce czasu):

$$\rho = \frac{\lambda}{s\mu} < 1$$

4. Pozostałe:

➢ **liczba zgłoszeń w kolejce**;

➢ **liczba zgłoszeń w systemie** (łącznie w kolejce i obsłudze);

➢ **czas oczekiwania w kolejce**;

➢ **czas pobytu w systemie obsługi** (łącznie w kolejce i obsłudze);

Charakterystyki liczbowe systemów masowej obsługi (3)

4. Pozostałe (c.d.):

- **czas przestoju kanału obsługi** (w okresie $[0, T]$);
- **czas zajętości kanału obsługi** (w okresie $[0, T]$);
- **liczba okresów kiedy stanowisko obsługi jest wolne** (w przedziale $[0, T]$).

Modele systemów masowej obsługi (1)

Charakterystyka modeli systemów masowej obsługi:

- charakter opisowy;

- możliwość wyliczenia podstawowych wielkości liczbowych dotyczących procesu masowej obsługi;

- modele optymalizacyjne masowej obsługi, jako najczęściej formułowane, w których poszukuje się optymalnej liczby kanałów obsługi kierując się kryterium najniższego kosztu całkowitego działania całego systemu (koszt przestoju stanowiska obsługi w jednostce czasu, koszt utraty zgłoszenia, koszt obsługi jednego zgłoszenia, itp.).

Modele systemów masowej obsługi (2)

Wielkości opisujące modele systemów masowej obsługi:

- τ_1 – czas upływający między dwoma kolejnymi zgłoszeniami;
- τ_2 – czas obsługi jednego zgłoszenia;
- ***s*** – liczba równoległych kanałów obsługi;
- ***R*** – liczebność obsługiwanej populacji (otoczenia, którego elementy mogą zgłaszać zapotrzebowanie na obsługę);
- ***L*** – maksymalna liczba miejsc w kolejce.

Modele systemów masowej obsługi (3)

Model masowej obsługi powinien uwzględniać:

- typ rozkładów prawdopodobieństw zmiennych losowych τ_1 oraz τ_2;
- zależność (niezależność) zmiennych losowych τ_1 oraz τ_2;
- wielkości ograniczające ***s***, ***R*** i ***L***;
- dyscyplinę kolejki (kolejność obsługi).

System kodowania modeli masowej obsługi:

$$f(\tau_1)\ /\ f(\tau_2)\ /\ s\ (R,L)$$

Modele systemów masowej obsługi (4)

Oznaczenia rozkładów prawdopodobieństw zmiennych losowych τ_1 *i* τ_2*:*

- D – proces nielosowy (deterministyczny);
- M – rozkład wykładniczy lub Poisson'a;
- E_n – rozkład Erlanga *n*-tego rzędu;
- N – rozkład normalny;
- GI – ogólny niezależny rozkład odstępu czasu pomiędzy kolejnymi zgłoszeniami;
- G – ogólny rozkład czasu obsługi.

Modele systemów masowej obsługi (5)

Przykład kodowania modeli systemów masowej obsługi:

$$M / E_4 / 1 (\infty , 100)$$

Model masowej obsługi, w którym czas pomiędzy kolejnymi zgłoszeniami jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym (bądź liczba zgłoszeń w jednostce czasu ma rozkład Poissona), czas obsługi jest zmienną losową o rozkładzie Erlanga 4-tego rzędu, model posiada jeden kanał obsługi, populacja zgłoszeń jest nieograniczona, a kolejka nie może przekraczać 100 zgłoszeń.

Modele systemów masowej obsługi (5)

Podstawowe własność procesu Markowa:

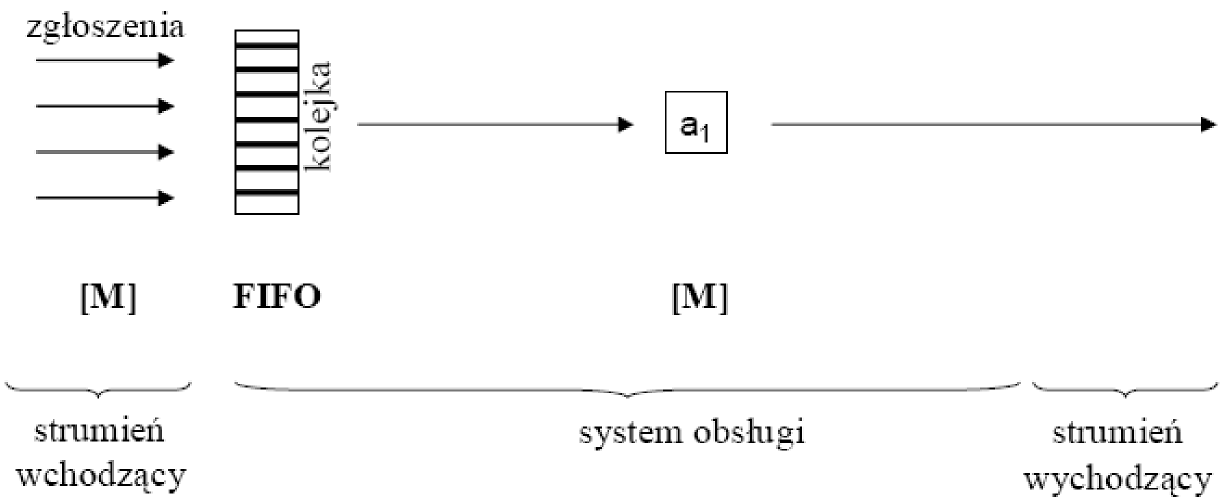
- zachowanie się procesu nie zależy od historii; dalsza ewolucja procesu jest określona przez jego bieżący stan,
- droga, jaką przebył, by dojść do tego stanu, nie jest istotna. Własność ta bywa nazywana brakiem pamięci.

Czas pobytu w dowolnym stanie ma rozkład wykładniczy który, jako jedyny rozkład ciągły, charakteryzuje się brakiem pamięci, tzn. prawdopodobieństwo pobytu w danym stanie przez czas t nie zależy od czasu t1, który proces już w tym stanie spędził

Jednokanałowy model masowej obsługi (1)

M / M / 1 (∞ , ∞)

Model masowej obsługi, w którym czas pomiędzy kolejnymi zgłoszeniami jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym (bądź liczba zgłoszeń w jednostce czasu ma rozkład Poissona), czas obsługi jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym, model posiada jeden kanał obsługi, populacja zgłoszeń jest nieograniczona, a długość kolejki jest także nieograniczona.



Jednokanałowy model masowej obsługi (2)

1. Strumień zgłoszeń

odstęp czasu (t) pomiędzy dwoma kolejnymi zgłoszeniami, który jest zmienną losową o tzw. ujemnym rozkładzie wykładniczym:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \qquad \text{dla } t \geq 0$$

z wartością oczekiwaną:

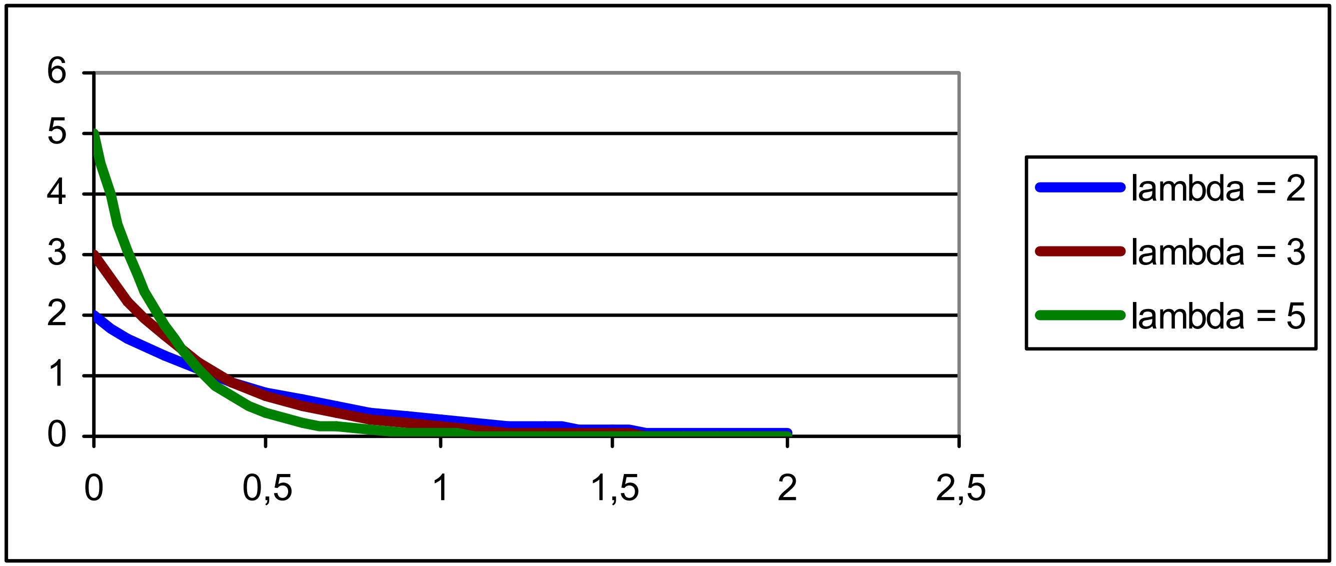
$E(t) = 1/\lambda$

oraz

wariancją:

$D^2(t) = (1/\lambda)^2$

lub



Jednokanałowy model masowej obsługi (3)

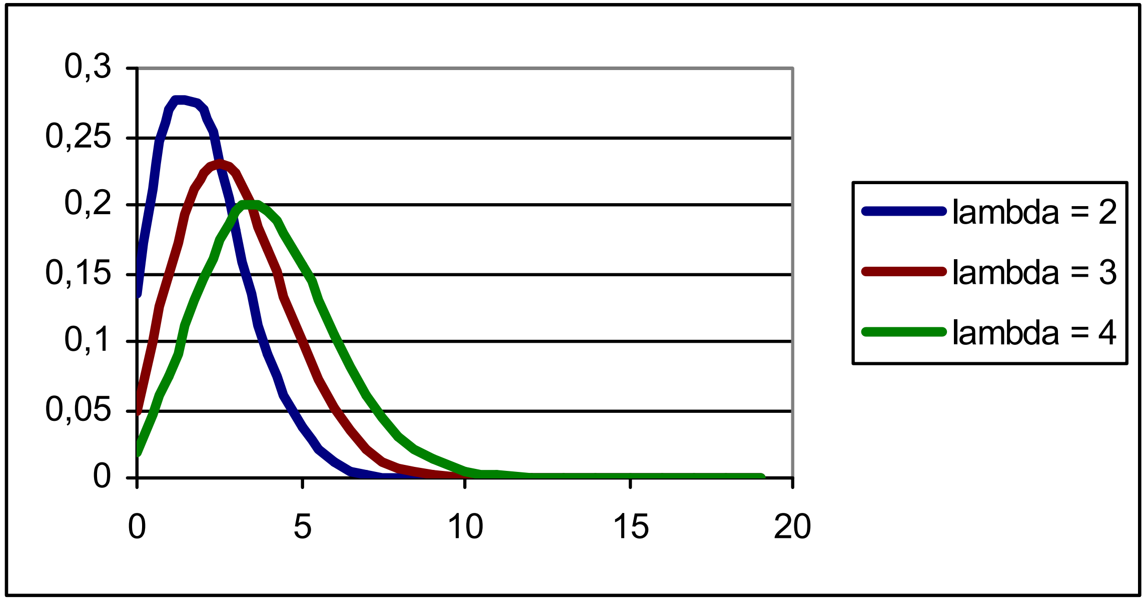
1. Strumień zgłoszeń (c.d)

liczba zgłoszeń (n) pojawiająca się w systemie w jednostce czasu o długości (T) jest zmienną losową o rozkładzie Poissona:

$P\{n=k\} = (\lambda T)^k e^{-\lambda T} / k!$ dla $k = 0,1,2,\ldots$

z wartością oczekiwaną i wariancją:

$E(n) = D^2(n) = \lambda T$



Jednokanałowy model masowej obsługi (4)

2. Obsługa jednego zgłoszenia

czasu (t) obsługi zgłoszenia jest zmienną losową o ujemnym rozkładzie wykładniczym:

$$g(t) = \mu e^{-\mu t} \qquad \text{dla } t \geq 0$$

z wartością oczekiwaną:

$E(t) = 1/\mu$

oraz

wariancją:

$D^2(t) = (1/\mu)^2$

Modele systemów masowej obsługi (5)

System ten może znajdywać się w następujących stanach

$$E_0, E_1, \ldots, E_k, \ldots, E_m, E_{m+1}, \ldots, E_{m+r}, \ldots, E_{m+N}$$

Stany od E_o do E_m oznaczają ilość obsługiwanych w czasie zgłoszeń, a stany od E_{m+1} do E_{m+N} oznaczają, iż zajęte są wszystkie kanały obsługi i ilość „klientów” w kolejce.

Układ równań, który opisuje dynamikę takiego systemu jest układem równań Chapmana-Kołmogorowa i ma następującą postać:

Modele systemów masowej obsługi (5)

$$p'_0(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t),$$

$$p'_1(t) = \lambda p_0(t) - (\lambda + \mu) p_1(t) + 2\mu p_2(t),$$

$$\vdots$$

$$p'_k(t) = \lambda p_{k-1}(t) - (\lambda + k\mu) p_k(t) + (k+1)\mu p_{k+1}(t),$$

$$\vdots$$

$$p'_m(t) = \lambda p_{m-1}(t) - (\lambda + m\mu) p_m(t) + m\mu p_{m+1}(t),$$

$$\vdots$$

$$p'_{m+r}(t) = \lambda p_{m+r-1}(t) - (\lambda + m\mu) p_{m+r}(t) + m\mu p_{m+r+1}(t)$$

$$\vdots$$

$$p'_{m+N}(t) = \lambda p_{m+N-1}(t) - m\mu p_{m+N}(t)$$

Przechodząc do granicy przy $t \to \infty$ dostajemy układ algebraicznych równań opisujący stan ustalony:

Modele systemów masowej obsługi (5)

$$0 = -\lambda p_0 + \mu p_1,$$

$$0 = \lambda p_0 - (\lambda + \mu) p_1 + 2\mu p_2,$$
$$\vdots$$
$$0 = \lambda p_{k-1} - (\lambda + k\mu) p_k + (k+1)\mu p_{k+1}, \qquad gdzie: 1 \le k < m,$$
$$\vdots$$
$$0 = \lambda p_{m-1} - (\lambda + m\mu) p_m + m\mu p_{m+1},$$
$$\vdots$$
$$0 = \lambda p_{m+r-1} - (\lambda + m\mu) p_{m+r} + m\mu p_{m+r+1}, \quad gdzie: 0 \le r < N,$$
$$\vdots$$
$$0 = \lambda p_{m+N-1} - m\mu p_{m+N}.$$

Wyniki poszczególnych prawdopodobieństw, możemy przedstawić jako funkcję prawdopodobieństwa po, podstawiając

Modele systemów masowej obsługi (5)

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

Otrzymujemy:

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0, \qquad gdzie: 1 \le k \le m-1,$$

$$p_j = \frac{\rho^j}{m^{j-m} m!} p_0, \quad gdzie: m \le j \le m+N.$$

Prawdopodobieństwo wyznaczyć można za pomocą warunku normalizującego, mającego postać

$$\sum_{l=0}^{N+m} p_l(t) = 1.$$

Jednokanałowy model masowej obsługi (5)

3. Wybrane charakterystyki liczbowe modelu M / M / 1 (∞, ∞)

λ – oczekiwana liczba zgłoszeń w jednostce czasu
$1/\mu$ – oczekiwany czas obsługi jednego zgłoszenia

Intensywność ruchu (stała Erlanga):

$\rho = \lambda / \mu$

Oczekiwana liczba zgłoszeń w systemie (*N*):

$N = \rho / (1 - \rho)$

Oczekiwana długość kolejki (*Q*):

$Q = \rho^2 / (1 - \rho)$

Jednokanałowy model masowej obsługi (6)

Oczekiwany czas pobytu w systemie (*R*):

$R = 1 / (\mu - \lambda)$

Oczekiwany czas pobytu w kolejce (*W*):

$W = \rho / (\mu - \lambda)$

Prawdopodobieństwo braku zgłoszeń w systemie:

$P_0 = (1 - \rho)$

Prawdopodobieństwo występowania *n* zgłoszeń w systemie:

$P_n = \rho^n(1 - \rho)$

Jednokanałowy model masowej obsługi (7)

Oczekiwany czas przestoju w przedziale czasu $[0, T]$ (***WT***):

$$WT = T / (1 - \rho)$$

Oczekiwany czas zajętości w przedziale czasu $[0, T]$ (***BT***):

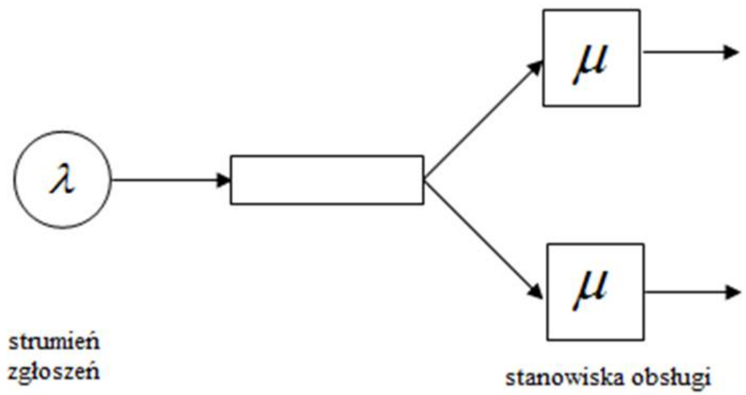
$$BT = T\rho$$

Oczekiwana liczba przestojów (przerw w pracy kanału) w przedziale czasu $[0, T]$ (***FPT***):

$$FPT = T\lambda(1 - \rho)$$

System kolejkowy M/M/2

System M/M/2 jest to dwukanałowy system obsługi. Zgodnie z klasyfikacja D. Kendall'a w systemie tym strumień wejściowy jest przedstawiony według rozkładu Poisson'a, czas obsługi opisany jest rozkładem wykładniczym, w systemie ma zastosowanie dyscyplina kolejki FIFO



System ten może znajdować się w następujących stanach:

$$H_0, H_1, \ldots, H_i, \ldots, H_m, H_{m+1}, \ldots, H_j, \ldots, H_\infty$$

gdzie: oznacza, iż w systemie jest *j* zgłoszeń a *j*={0,1,...}.

Natomiast stany bez kolejki to od H_0 do H_m, a stany z kolejką od H_{m+1} do H∞.

System kolejkowy M/M/2

Podstawowe charakterystyki systemu:
współczynnik obciążenia systemu wynosi

$$\rho = \frac{\lambda}{2\mu}$$

prawdopodobieństwo , iż w badanym czasie nie wystąpi żadne zgłoszenie wynosi :

$$P_0 = \left\{ \left[\frac{(2\rho)^0}{0!} + \frac{(2\rho)^1}{1!} \right] + (2\rho)^2 \times \frac{1}{2!} \times \frac{1}{1-\rho} \right\}^{-1}$$

średnia długość kolejki wynosi

$$Lq = P_0 \times \frac{\rho^2}{2!} \times \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

System kolejkowy M/M/2

średnia liczba klientów w systemie jest równa:

$$L = Lq + \frac{\lambda}{\mu}$$

średni czas oczekiwania w kolejce wynosi :

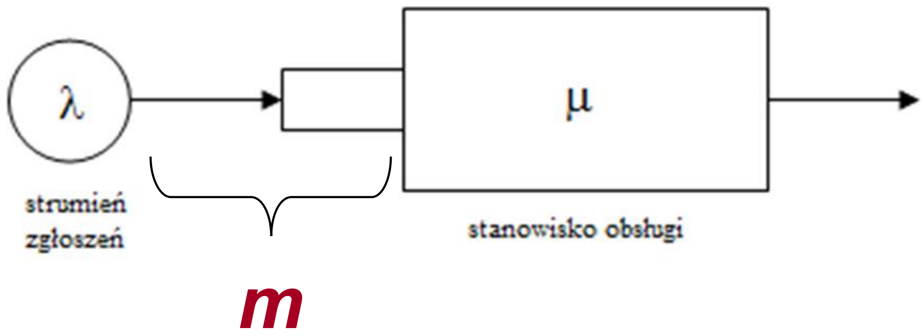
$$Wq = \frac{\overline{v}}{\lambda}$$

średni czas przebywania klienta w systemie:

$$W = Wq + \frac{1}{\mu}$$

System kolejkowy M/M/1/L

Jest to system kolejkowy, w którym rozkład czasu pomiędzy kolejnymi zgłoszeniami do systemu oraz rozkład czasu obsługi pojedynczego zgłoszenia są rozkładami wykładniczymi. Posiada on pojedyncze stanowisko obsługi oraz **maksymalną pojemność poczekalni (liczba dostępnych miejsc w kolejce) która wynosi m**. W systemie może się znajdować maksymalnie *m+1 zgłoszeń, w tym jedno będzie obsługiwane, a pozostałe zgłoszenia będą oczekiwać w kolejce*. Zarówno te zgłoszenia które zostały już obsłużone jak i te które otrzymały odmowę, natychmiast opuszczają system.



System kolejkowy M/M/1/L

H_0 - brak zgłoszeń,

H_1 - jedno zgłoszenie (obsługiwane) w systemie,

H_2 - dwa zgłoszenia (jedno obsługiwane, drugie w kolejce) w systemie,

...

H_m -m zgłoszeń (jedno obsługiwane i *m-1* znajduje się w kolejce) w systemie,

H_{m+1} - m+1 zgłoszeń (jedno obsługiwane i *m* w kolejce; każde nowo przybyłe zgłoszenie jest tracone)

prawdopodobieństwo blokady systemu:

$$p_{bl} = \frac{\rho^{m+1}(1-\rho)}{1-\rho^{m+2}}$$

średnia liczba klientów systemie wynosi:

$$L = 1 \times p_1 + 2 \times p_2 + \cdots + (m+1) \times p_{m+1} = \frac{\rho[1-(m+2)\rho^{m+1} + (m+1)\rho^{m+2}]}{(1-\rho)(1-\rho^{m+2})}$$

System kolejkowy M/G/1

W systemie obsługi M/G/1 czas pomiędzy kolejnymi zgłoszeniami ma rozkład wykładniczy. System ten ma jedno stanowisko obsługi oraz nieograniczoną pojemność poczekalni. Czas obsługi jest zmienna losową o skończonej wartości, wariancji $\sigma^2 = \frac{1}{\mu^2}$ i dystrybuancie B(t), natomiast jej średnia wartość wynosi $\frac{1}{\mu}$

średnia liczba klientów w systemie $$L = \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2\sigma^2}{2(1-\rho)}$$

średnia długość kolejki wynosi $$Lq = L - Wq = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}\left[1 + \left(\frac{\sigma}{\tau^2}\right)^2\right] gdzie\ \tau^2 = \sigma = \frac{1}{\mu}$$

średni czas przebywania klienta w systemie wynosi

$$W = \frac{L}{\lambda}$$