ZAKŁÓCENIA PODCZAS POMIARÓW CYFROWYCH.

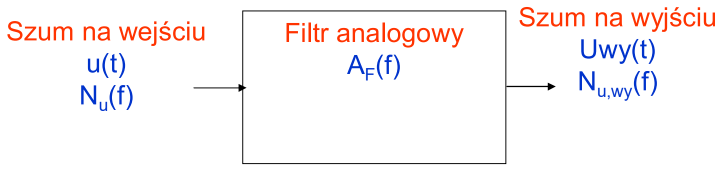
Cz. 2. FILTRACJA I UŚREDNIANIE SZUMU

Plan wykładu

1. Analogowa filtracja szumu
2. Szum skorelowany
3. Próbkowanie szumu skorelowanego
4. Wpływ samo skorelowania na standardową
5. Estymacja funkcji autokorelacji
6. Uwzględnienie skorelowania obserwacji
7. Podsumowanie

1. ANALOGOWA FILTRACJA SZUMU

Jeśli do wejścia filtru analogowego, który charakteryzuje się charakterystyką amplitudo - częstotliwościową $A_F(f)$ podawany jest szum o widmowej gęstości napięcia $N_u(f)$



Wtedy wariancja szumu na wyjściu filtra

$$\sigma_{wy}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} N_u(f) \left| A_F(f) \right|^2 df$$

1. ANALOGOWA FILTRACJA SZUMU

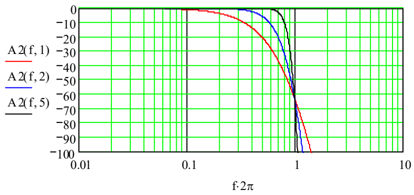
Jeśli gęstość widmowa szumu w paśmie przepustowym filtru analogowego jest w przybliżeniu stałą $N_u(f) = N_{u,0}$ (szum biały rzeczywisty), wtedy wariancja szumu na wyjściu filtra wyznaczana jest powierzchnią kwadratu modułu charakterystyki amplitudo-częstotliwościowej filtru

$$\sigma_{wy}^2 = N_{u,0} \int_{-\infty}^{\infty} \left| A_F(f) \right|^2 df$$

1. ANALOGOWA FILTRACJA SZUMU

Przykładowo, w dla filtru Butherwortha rzędu n oraz stałą czasową τ_F, którego charakterystyka amplitudo-częstotliwościowa

$$A_F(f) = \frac{1}{\sqrt{1+(2\pi f \tau_F)^{2n}}}$$



wariancja szumu na wyjściu filtra

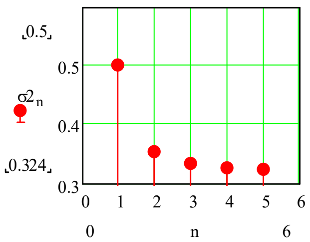
$$\boxed{\sigma_{wy}^2 = \frac{N_{u,0}}{2n \cdot \tau_F \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}}$$

1. ANALOGOWA FILTRACJA SZUMU

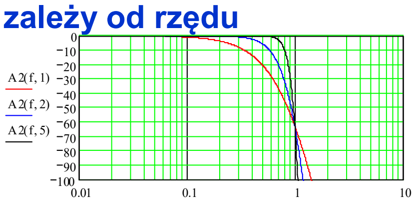
Wariancja szumu na wyjściu filtra

$$A_F(f) = \frac{1}{\sqrt{1+(2\pi f \tau_F)^{2n}}}$$

$$\boxed{\sigma_{wy}^2 = \frac{N_{u,0}}{2n \cdot \tau_F \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}}$$



W małym stopniu zależy od rzędu filtru, ponieważ powierzchnia pod kwadratem modułu charakterystyki bardzo mało zależy od rzędu



1. ANALOGOWA FILTRACJA SZUMU

Teoretycznie przy dużych rzędach filtru wariancja szumu na wyjściu filtra dąży do wartości

$$\boxed{\sigma_{wy}^{2} \rightarrow \frac{N_{u,0}}{\pi \cdot \tau_F}}$$

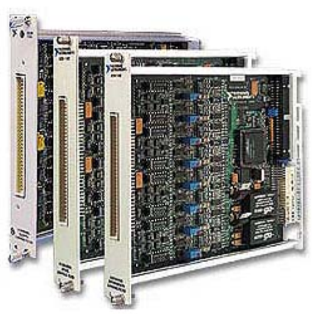
Tj. wykorzystanie filtrów rzędu ponad 3 przy tej samej stałej czasowej filtru nie powoduje istotnego zmniejszenia wpływu szumu.

Zwiększenie tłumienia szumu zapewnia się poprzez odpowiednie zwiększenie stałej czasowej, tj. zawężenie szerokości pasma przepustowego filtru.

Jednak w tym przypadku pogarsza się właściwości dynamiczne toru pomiarowego.

1. ANALOGOWA FILTRACJA SZUMU

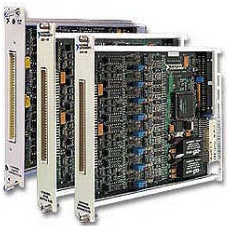
Wielokanałowe moduły filtrów dolnoprzepustowych na przełączanych kondensatorach SCXI_1141/1142/1143, produkcji firmy National Instruments



1. ANALOGOWA FILTRACJA SZUMU

Każdy kanał wyposażony jest w wejścia różnicowe, sygnały których (w zakresie od ±50 mV do ±5 V) są wzmacniane wzmacniaczem ze sterowanym programowo wzmocnieniem oraz są filtrowane filtrami, parametry których też są sterowane (przestrajani) programowo.

Każdy filtr kanałowy ma 8-y rząd, dzięki czemu zapewnia się duże stroma charakterystyka amplitudowa w paśmie przejściowym.



1. ANALOGOWA FILTRACJA SZUMU

W celu eliminacji wpływu efektów, powiązanych z okresowym przełączeniem kondensatorów, wykorzystują się zwykły ARC- filtry, które są włączone do i po filtrach na kondensatorach komutowanych.

Dzięki takiej konstrukcji filtrów zapewnia się możliwość programowanego ich przestrajania na 1000 różnych częstotliwości granicznych w zakresie od 10 Hz do 25 kHz dzieląc częstotliwość *n* razy: , gdzie n=4, 5, 6,…,1000.

W każdym kanalie jest możliwie nie tylko przestrajanie częstotliwość graniczną, ale także i zmieniać typ filtru dolnoprzepustowego (Baterwortha, Eliptyczne, Bessela).

1. ANALOGOWA FILTRACJA SZUMU

Wyjściowy multiplekser zapewnia dwa rodzaje pracy: szeregowy, kiedy do jednego wyjścia w zadanej kolejności są podawane sygnały wzmocnione i filtrowane od różnych kanałów, oraz równoległy, kiedy sygnały (po filtracji) ze wszystkich kanałów jednocześnie są podawane do złącza wyjściowego modułu.

Szeregowy tryb pracy wykorzystuje się w razie następnego wykorzystania karty pomiarowej (akwizycji danych pomiarowych) z jednym wejściem analogowym.

Moduł zapewnia także możliwość korekcji przesunięcia addytywnego (przesunięcie zera) każdego kanału, oraz przy wykorzystaniu źródła zewnętrznego możliwość kalibracji błędów multiplikatywnych (nachylenia charakterystyki).

Parametry kalibracji każdego kanału są wpisywane w pamięć EEPROM.

2. Uśrednianie szumów losowych podczas pomiarów cyfrowych/ 2.1. Szum nieskorelowany

1) **Rozkład** prawdopodobieństwa obserwacji nie jest sprzeczny z modelem rozkładu **Gaussa**;

2) Obserwacje wzajemnie **niezależne** (nie skorelowane)

2. Uśrednianie szumów losowych podczas pomiarów cyfrowych.
2.1. Szum nieskorelowany

$$\boxed{\mathbf{X}^T = (x_1, x_2, \ldots, x_N)}$$

Najlepszym wynikiem pomiaru jest wartość średnia:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i}$$

z minimalną wartością standardowej niepewności:

$$\boxed{u_A(\bar{x}) = \frac{S_x}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2}{N}}}$$

2. Uśrednianie szumów losowych podczas pomiarów cyfrowych/
2.1. Szum nieskorelowany

Polepszenie wyniku pomiaru (wartości średniej) możliwie jest poprzez zwiększenie liczby zarejestrowanych obserwacji N.

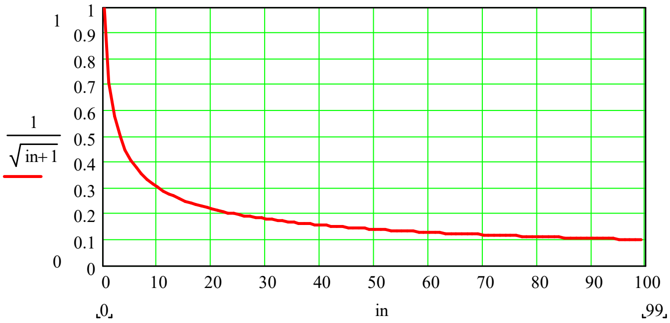
Przy stałej wariancji szumu losowego σ_{sz}

wartość standardowa niepewności średniej niepewności:

$$\boxed{u_A(\bar{x}) = \frac{\sigma_{sz}}{\sqrt{N}}}$$

2. Uśrednianie szumów losowych podczas pomiarów cyfrowych.
2.1. Szum nieskorelowany

$$u_A(\overline{x}) = \frac{\sigma_{sz}}{\sqrt{N}}$$



2. Uśrednianie szumów losowych podczas pomiarów cyfrowych.
2.1. Szum nieskorelowany

Polepszenie wyniku pomiaru (zmniejszenie standardowej niepewności wartości średniej) w wyniku uśredniania zarejestrowanych obserwacji ze zwiększeniem ich liczby :

$$u_A(\overline{x}) = \frac{\sigma_{sz}}{\sqrt{N}}$$

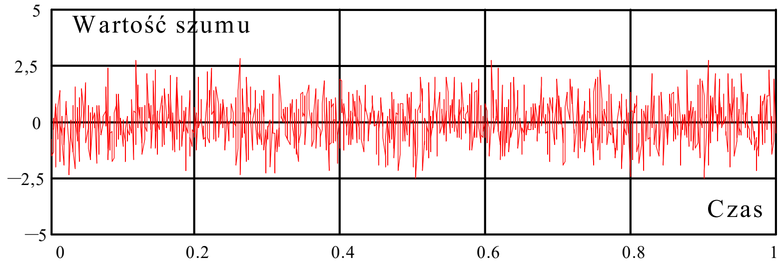
możliwie jest tylko przy niezależnych (nieskorelowanych) obserwacjach

2.2.Szumy losowe nieskorelowane

Szum nie skorelowany jest szumem w którym każda jego następna wartość nie zależy od poprzedniej .

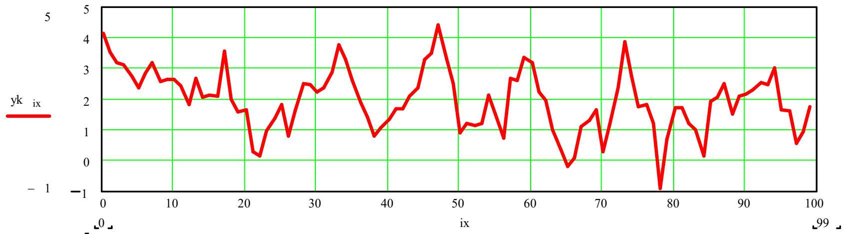
Prognoza takiego szumu nie jest możliwa.

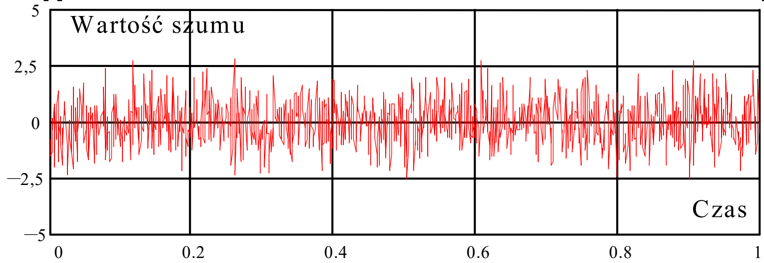
Jednak jest to tylko model teoretyczny, w rzeczywistości nie istnieje szumu absolutnie nieskorelowanego



2.2.Szumy losowe skorelowane

Szum skorelowany jest szumem w którym każda jego następna wartość częściowo (statystycznie) zależy od poprzedniej.





2. Szum losowy skorelowany

Ponieważ gęstość widmowa $N_u(f)$ szumu i jego funkcją autokorelacji $R_u(\tau)$ powiązane pomiędzy sobą przekształceniami Fouriera, dlatego przy znanej gęstości widmowej $N_u(f)$ szumu jego funkcją autokorelacji $R_u(\tau)$ wyznaczana jest według wzoru

$$\boxed{R_u(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} N_u(f) e^{-j2\pi f\tau} df}$$

Niechaj szum jest na wyjściu układu dynamicznego o charakterystyce amplitudo-częstotliwościowej A(f) na wejściu którego podawany jest szum biały o stałej gęstości N_{u0}, wtedy gęstości widmowa $N_{u,d}(f)$ szumu na wyjściu

$$N_{u,d}(f) = N_{u,0} \cdot A_d^2(f)$$

2. Szum losowy skorelowany

Przykładowo, jeśli układem dynamicznym jest układ pierwszego stopnia o charakterystyce amplitudo-częstotliwościowej $A_1(f)$

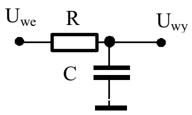
$$A_1(f) = \frac{1}{\sqrt{1+(2\pi f\tau_a)^2}}$$

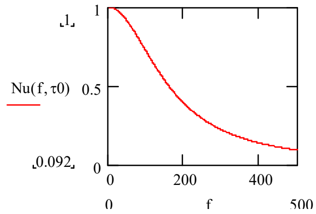
Wtedy funkcją autokorelacji $R_u(\tau)$ wyznaczana jest według wzoru

$$\boxed{R_{u,1}(\tau) = N_{u,0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j2\pi f\tau}}{1+(2\pi f\tau_a)^2} df = \frac{N_{u,0}}{2\tau_a} e^{-\frac{\tau}{\tau_a}}}$$

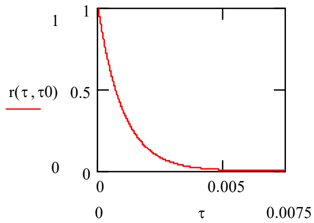
2. Szum losowy skorelowany

Otóż, skorelowanie szumu może być spowodowane przejściem szumu nie skorelowanego przez układ liniowy inercyjny, na przykład filtr dolnoprzepustowy z odpowiednimi stałymi czasowymi.





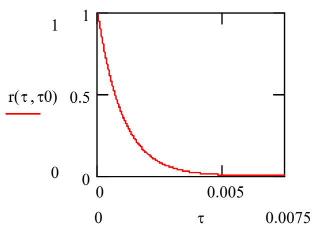
Stopień skorelowania próbek sygnału skorelowania zależy od częstotliwości (okresu) próbkowania sygnału

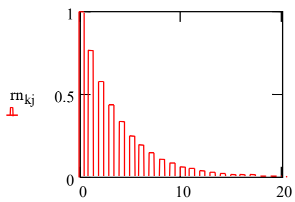


3. Próbkowanie szumu skorelowanego

Podczas próbkowania (częstotliwość próbkowania f_p) sygnału (szumu) losowego funkcja autokorelacji sygnału spróbkowanego też jest próbkowana z tą samą częstotliwością,

Tj. funkcja autokorelacji sygnału spróbkowanego ma postać próbek.

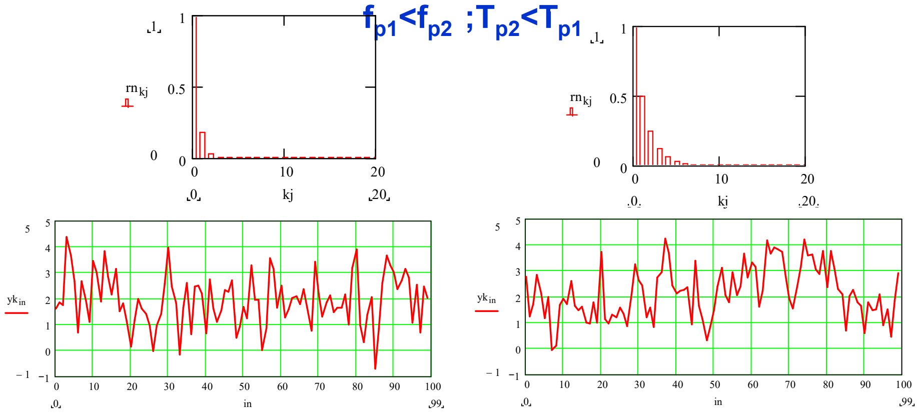




3. Próbkowanie szumu skorelowanego

Zwiększenie częstotliwości próbkowania (zmniejszenie okresu próbkowania) tego samego sygnału losowego skorelowanego powoduje zwiększenie skorelowania pomiędzy próbkami!

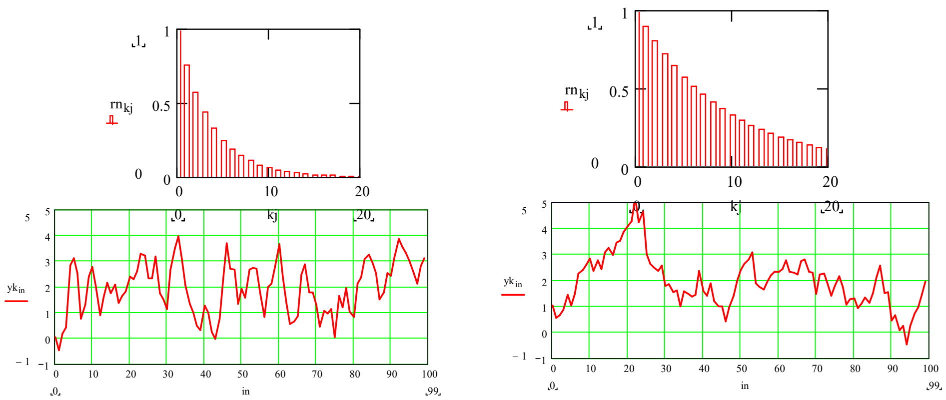
$f_{p1}<f_{p2}$;$T_{p2}<T_{p1}$



3. Próbkowanie szumu skorelowanego

Zwiększenie częstotliwości próbkowania tego samego sygnału losowego skorelowanego powoduje zwiększenie skorelowania pomiędzy próbkami!

$f_{p1}<f_{p2}<f_{p3}<f_{p4}$; $T_{p4}<T_{p3}<T_{p2}<T_{p1}$



4. Wpływ samo skorelowania na standardową niepewność wartości średniej

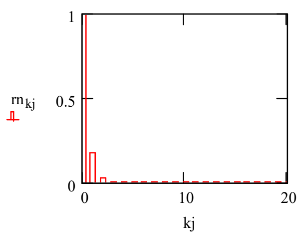
W przypadku obserwacji samo skorelowanych ($\rho_i \neq 0$, $i>1$) standardowa niepewność ich wartości średniej

$$u_A(\bar{x}) = \frac{S_x}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{N-1}{N_{eff}-1}}$$

Gdzie N_{eff} efektywna liczba skorelowanych obserwacji

$$N_{eff} = \frac{N}{1+2\sum_{i=1}^{N-1}\left(1-\frac{i}{N}\right)\rho_i} = \frac{N}{1+R_{\rho,N}}$$

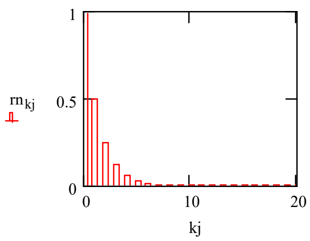
4. Wpływ samo skorelowania na standardową niepewność wartości średniej



$N = 100$ $\quad 2\cdot\sum_{i=1}^{N-1}\left[\left(1-\frac{i}{N}\right)\cdot rn_i\right] = 0.424$

$$Neff := \frac{N}{1+2\cdot\sum_{i=1}^{N-1}\left[\left(1-\frac{i}{N}\right)\cdot rn_i\right]}$$

$Neff = 70.212$

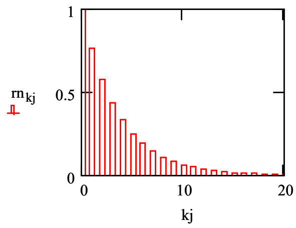


$N = 100$ $\quad 2\cdot\sum_{i=1}^{N-1}\left[\left(1-\frac{i}{N}\right)\cdot rn_i\right] = 1.96$

$$Neff := \frac{N}{1+2\cdot\sum_{i=1}^{N-1}\left[\left(1-\frac{i}{N}\right)\cdot rn_i\right]}$$

$Neff = 33.784$

4. Wpływ samo skorelowania na standardową niepewność wartości średniej

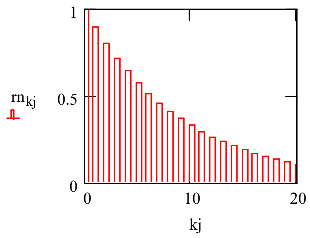


$N = 100$

$$2\cdot\sum_{i=1}^{N-1}\left[\left(1-\frac{i}{N}\right)\cdot rn_i\right] = 5.983$$

$$Neff := \frac{N}{1 + 2\cdot\sum_{i=1}^{N-1}\left[\left(1-\frac{i}{N}\right)\cdot rn_i\right]}$$

$Neff = 14.321$



$N = 100$

$$2\cdot\sum_{i=1}^{N-1}\left[\left(1-\frac{i}{N}\right)\cdot rn_i\right] = 14.12$$

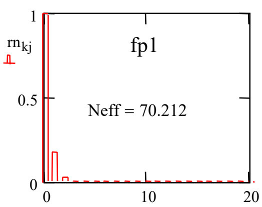
$$Neff := \frac{N}{1 + 2\cdot\sum_{i=1}^{N-1}\left[\left(1-\frac{i}{N}\right)\cdot rn_i\right]}$$

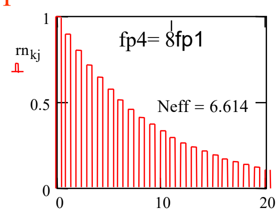
$Neff = 6.614$

4. Wpływ samo skorelowania na standardową niepewność wartości średniej

Stąd widzimy, że w wyniku zwiększenia częstotliwości próbkowania (zmniejszenia okresu próbkowania) tego samego sygnału losowego powiększa się skorelowanego pomiędzy próbkami i tym samym liczba efektywnych nieskorelowanych próbek istotnie zmniejsza się.

N=100, fp4=8fp1

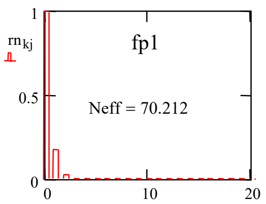


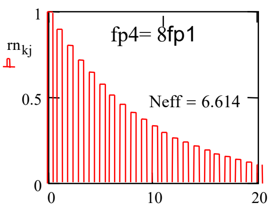


4. Wpływ samo skorelowania na standardową niepewność wartości średniej

Stąd wynika, że zwiększenie częstotliwości próbkowania (w kartach pomiarowych jest to bardzo proste do realizacji) i uzyskanie większej liczby próbek nie zapewnia zmniejszenia niepewności standardowej wartości średniej, co ma miejsce przy próbkach nieskorelowanych.

N=100, fp4=8fp1





5. Estymacja funkcji autokorelacji

W praktyce rzadko mamy pełną informację o unormowanej funkcji autokorelacji obserwacji.

Wykorzystanie nieobciążonego estymatora funkcji autokorelacji, na przykład

$$\boxed{r_i = \frac{\dfrac{1}{N-i-1}\sum_{j=1}^{N-i}\left(x_j-\bar{x}\right)\left(x_{j+i}-\bar{x}\right)}{S_x^2}}$$

wiąże się z dużą statystyczną niestabilnością .

Oprócz wykorzystanie wszystkich próbek estymowanej funkcji autokorelacji zawsze (niezależnie od rzeczywistej autokorelacji) powoduje, że:

$$1+2\sum_{i=1}^{N-1}\left(1-\frac{r_i}{N}\right)=0!$$

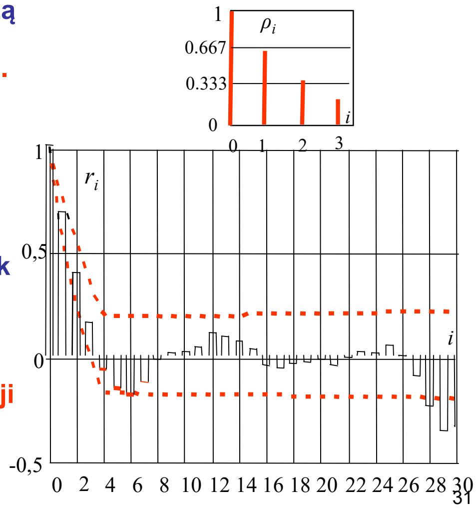
5. Estymacja funkcji autokorelacji

Wykorzystanie nieobciążonego estymatora funkcji autokorelacji, wiąże się z dużą statystyczną niestabilnością wartości przedziałów ufności. Nawet przy ρ=0

$$\boxed{r_p \approx th\left[\pm \frac{\varepsilon_P}{\sqrt{N-i-3}}\right]}$$

ε_p – współczynnik rozszerzenia ($\varepsilon_{0,90} \approx 1{,}65$ oraz $\varepsilon_{0,95} \approx 1{,}96$ jak dla rozkładu normalnego).

Niepewność oceny pierwszych współczynników autokorelacji wynosi około ±20%



5. Estymacja funkcji autokorelacji

Oprócz tego, wykorzystując estymowane wartości funkcji autokorelacji czasem pojawiają się sytuacji, gdy wartość wariancji wartości średniej może okazać się ujemną!

Przy stosunkowo małym skorelowaniu estymowane wartości funkcji autokorelacji mogą być ujemnymi i dlatego wartość członu

$$\boxed{1+R_{r,N/10} = 1+2\sum_{i=1}^{N/10-1}\left(1-\frac{i}{N}\right)r_i}$$

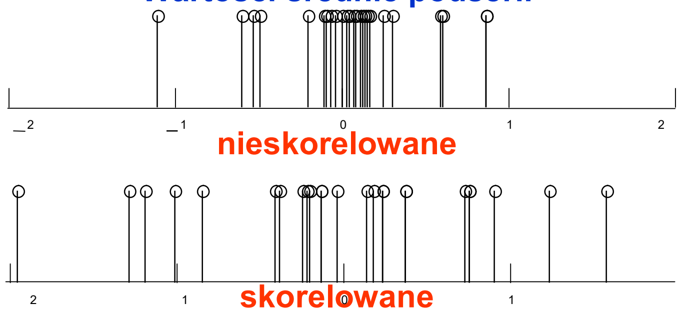
może być ujemną

Stąd efektywna liczna obserwacji też może być ujemną.

5. Metoda pośredniego testowania istotności wzajemnego skorelowania obserwacji

Idea metody bazuje na analizie skutku samo skorelowania, mianowicie na analizie wariancji wartości średnich obliczonych z krótszych podserii otrzymanych z zarejestrowanych obserwacji:

Wartości średnie podserii



5. Metoda pośredniego testowania istotności wzajemnego skorelowania obserwacji

W celu przeprowadzenia pośredniej identyfikacji skorelowania *N* zarejestrowanych obserwacji podzielimy je na *k* podserii o długości *n* obserwacji (N=n×k)

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_{n+1} & \cdots & x_{(j-1)\cdot n+1} & \cdots & x_{(k-1)\cdot n+1} \\ x_2 & x_{n+2} & \cdots & x_{(j-1)\cdot n+2} & \cdots & x_{(k-1)\cdot n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_l & x_{n+l} & \cdots & x_{(j-1)\cdot n+l} & \cdots & x_{(k-1)\cdot n+l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & x_{2n} & \cdots & x_{j\cdot n} & \cdots & x_{k\cdot n} \end{bmatrix}$$

3.Metoda pośredniego testowania istotności wzajemnego skorelowania obserwacji

Dla każdej *j* - tej podserii obserwacji (j = 1, 2,…, k) o długości n obliczane są ich wartości średnie:

$$\boxed{\bar{x}_{n,j} = \frac{1}{n}\sum_{i=(j-1)\cdot n+1}^{j\cdot n} x_i}$$

Oraz globalną wartość średnią:

$$\boxed{\bar{x}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} \bar{x}_{n,k}}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_{n+1} & \cdots & x_{(j-1)\cdot n+1} & \cdots & x_{(k-1)\cdot n+1} \\ x_2 & x_{n+2} & \cdots & x_{(j-1)\cdot n+2} & \cdots & x_{(k-1)\cdot n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_l & x_{n+l} & \cdots & x_{(j-1)\cdot n+l} & \cdots & x_{(k-1)\cdot n+l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & x_{2n} & \cdots & x_{j\cdot n} & \cdots & x_{k\cdot n} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\bar{x}_{n,1} \quad \bar{x}_{n,2} \quad \cdots \quad \bar{x}_{n,j} \quad \cdots \quad \bar{x}_{n,k} \quad \bar{x}_N}$$

5.Metoda pośredniego testowania istotności wzajemnego skorelowania obserwacji

Jednocześnie są obliczane: estymatory wariancji wszystkich obserwacji

$$\boxed{S_N^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

oraz średnich wartości :

$$\boxed{S_{\bar{x}_n,k}^2 = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}(\bar{x}_{n,j} - \bar{x})^2}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_{n+1} & \cdots & x_{(j-1)\cdot n+1} & \cdots & x_{(k-1)\cdot n+1} \\ x_2 & x_{n+2} & \cdots & x_{(j-1)\cdot n+2} & \cdots & x_{(k-1)\cdot n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_l & x_{n+l} & \cdots & x_{(j-1)\cdot n+l} & \cdots & x_{(k-1)\cdot n+l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & x_{2n} & \cdots & x_{j\cdot n} & \cdots & x_{k\cdot n} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\bar{x}_{n,1} \quad \bar{x}_{n,2} \quad \cdots \quad \bar{x}_{n,j} \quad \cdots \quad \bar{x}_{n,k} \quad \bar{x}_N}$$

5. Metoda pośredniego testowania istotności wzajemnego skorelowania obserwacji

Na podstawie obydwu estymatorów wariancji obliczany jest estymator średniej wariancji pomiędzy podseriami obserwacji : $\boxed{S_N^2}$ $\boxed{S_{\bar{x}_n,k}^2}$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_{n+1} & \cdots & x_{(j-1)\cdot n+1} & \cdots & x_{(k-1)\cdot n+1} \\ x_2 & x_{n+2} & \cdots & x_{(j-1)\cdot n+2} & \cdots & x_{(k-1)\cdot n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_l & x_{n+l} & \cdots & x_{(j-1)\cdot n+l} & \cdots & x_{(k-1)\cdot n+l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & x_{2n} & \cdots & x_{j\cdot n} & \cdots & x_{k\cdot n} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\overline{S_{n,k}^2} = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} S_j^2 = S_N^2 - S_{\bar{x}_n,k}^2}$$

$$\boxed{\bar{x}_{n,1} \quad \bar{x}_{n,2} \quad \cdots \quad \bar{x}_{n,j} \quad \cdots \quad \bar{x}_{n,k} \quad \bar{x}_N}$$

5.Metoda pośredniego testowania istotności wzajemnego skorelowania obserwacji

Przy normalnym rozkładzie obserwacji o (nieznanej) wariancji σ^2 oraz przy braku ich wzajemnego skorelowania estymowane wariancje $S_{\bar{x}_n,k}^2$ oraz $\overline{S_{n,k}^2}$ charakteryzują się liczbą stopni swobody:

$$\boxed{S_{\bar{x}_n,k}^2 = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\left(\bar{x}_{n,j} - \bar{x}\right)^2} \qquad \boxed{S_{\bar{x}_n,k}^2 \Rightarrow k-1}$$

$$\boxed{\overline{S_{n,k}^2} = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} S_j^2 = S_N^2 - S_{\bar{x}_n,k}^2} \qquad \boxed{\overline{S_{n,k}^2} \Rightarrow N-k}$$

5.Metoda pośredniego testowania istotności wzajemnego skorelowania obserwacji

Stosunek :

$$F_s = \frac{S^2_{\bar{x}_n,k}}{k-1} \Big/ \frac{\overline{S^2_{n,k}}}{N-k} = \frac{N-k}{k-1} \cdot \frac{1}{S^2_N \big/ S^2_{\bar{x}_n,k} - 1}$$

jako wielkość losowa podlega rozkładowi *F* (rozkładowi Fischera -Snedecora).

Indeks „*s*” w F_s wskazuje, że tą wartość wyznaczono na podstawie estymowanych wariancji:

$$S^2_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 \qquad S^2_{\bar{x}_n,k} = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}(\bar{x}_{n,j} - \bar{x})^2 \qquad \overline{S^2_{n,k}} = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} S^2_j = S^2_N - S^2_{\bar{x}_n,k}$$

6. Metoda pośredniego testowania istotności wzajemnego skorelowania obserwacji

Jeśli dla zadanego poziomu istotności α oraz stopni swobody k -1, N - k obliczona wartość zmiennej *Fs* nie przekracza wartości granicznej $F_{k-1,N-k}$ wyznaczonej z odwrotnej dystrybuanty F – rozkładu dla zadanego poziomu istotności α:

$$F_s \le F_{k-1,N-k}$$

wtedy nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o równości wartości wariancji średniej wyznaczonej na podstawie średnich podserii oraz wariancji średniej wyznaczonej na podstawie średnich wariancji tych podserii.

To jest z dużym prawdopodobieństwem obserwacja nie są wzajemnie skorelowane.

5. Metoda pośredniego testowania istotności wzajemnego skorelowania obserwacji

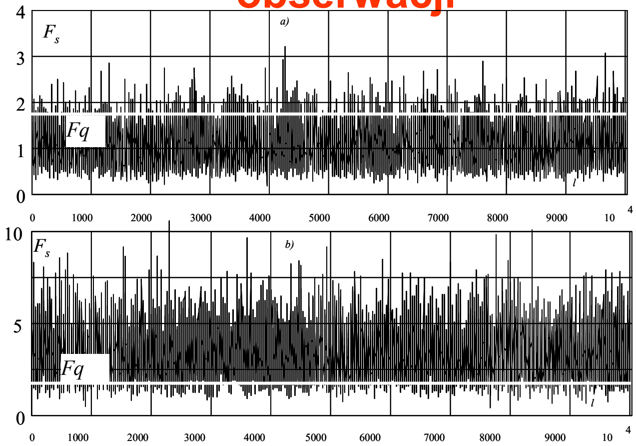
Natomiast, jeśli obliczona wartość zmiennej *Fs* jest większą od wartości granicznej:

$$\boxed{F_s > F_{k-1,N-k}}$$

wtedy z dużym prawdopodobieństwem należy odrzucić tą hipotezę.

Ponieważ w modelu obserwacji losowych założono stałe (chociaż nie znane) wartości oczekiwanej i wariancje obserwacji, dlatego spełnienie warunku oznacza że rozrzut wartości średnich nie może występować tylko z powodu naturalnej ich losowości, a istnieje inna przyczyna i tą przyczyną (w przyjętym modelu statystycznym) jest wzajemne skorelowanie obserwacji.

5. Metoda pośredniego testowania istotności wzajemnego skorelowania obserwacji



Wyniki testu na brak skorelowania szeregu 100 obserwacji nie skorelowanych oraz skorelowanych przy unormowanej funkcji autokorelacji $\boxed{\rho_i = e^{-0.7i}}$

6. Uwzględnienie skorelowania obserwacji

Przy pośrednim (bez estymacji funkcji autokorelacji) stwierdzeniu skorelowania obserwacji należy wyznaczyć minimalną długość n podserii po której obserwacje w poziomych wierszach nie będą skorelowane

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_{n+1} & \cdots & x_{(j-1)\cdot n+1} & \cdots & x_{(k-1)\cdot n+1} \\ x_2 & x_{n+2} & \cdots & x_{(j-1)\cdot n+2} & \cdots & x_{(k-1)\cdot n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_l & x_{n+l} & \cdots & x_{(j-1)\cdot n+l} & \cdots & x_{(k-1)\cdot n+l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & x_{2n} & \cdots & x_{j\cdot n} & \cdots & x_{k\cdot n} \end{bmatrix}$$

6. Uwzględnienie skorelowania obserwacji

Dla obserwacji (w wierszach) : x_{1+j}, x_{n+j}, x_{2n+j}, x_{3n+j}, …, $x_{(k-1)n+j}$ gdzie j=1,2,..,k, obliczamy wartości średnie i wariancje nieskorelowanych obserwacji

$$\bar{x}_l = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_{l+(i-1)n}; \quad S_l^2 = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\left(x_{l+(i-1)n} - \bar{x}_l\right)^2; \quad l = 1,2,\ldots,n$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_{n+1} & \cdots & x_{(j-1)\cdot n+1} & \cdots & x_{(k-1)\cdot n+1} \\ x_2 & x_{n+2} & \cdots & x_{(j-1)\cdot n+2} & \cdots & x_{(k-1)\cdot n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_l & x_{n+l} & \cdots & x_{(j-1)\cdot n+l} & \cdots & x_{(k-1)\cdot n+l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & x_{2n} & \cdots & x_{j\cdot n} & \cdots & x_{k\cdot n} \end{bmatrix}$$

7. Uwzględnienie skorelowania obserwacji

$$\bar{x}_l = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_{l+(i-1)\cdot n}; \quad S_l^2 = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\left(x_{l+(i-1)\cdot n} - \bar{x}_l\right)^2; \quad l = 1,2,\ldots,n$$

Następnie obliczamy wartości średnie tych wariancji obserwacji nieskorelowanych $\overline{S_l^2} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} S_l^2$

Stąd skorygowane oszacowanie niepewności standardowej wartości średniej obliczmy wg wzoru:

$$u_A(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\overline{S_l^2}}{k}} = \sqrt{\overline{S_l^2} \cdot \frac{n}{N}}$$

Podsumowanie

1. Metoda testowania skorelowania realizuje się w bardzo prosty sposób:

(1) Podczas rejestracji obserwacji wyznaczane są wartości średnie kolejnych grup obserwacji $\bar{x}_{n,j} = \frac{1}{n}\sum_{i=(j-1)\cdot n+1}^{j\cdot n} x_i$ (j = 1,2,…, k)

oraz globalna wartość średnia $\bar{x}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$

a także wariancja: średnich $S_{\bar{x}_n,k}^2 = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\left(\bar{x}_{n,j} - \bar{x}\right)^2$ i wariancja globalna $S_N^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}\right)^2$

(2) Na podstawie tych wartości wyznaczany jest stosunek

$$F_s = \frac{S_{\bar{x}_n,k}^2}{k-1} \bigg/ \frac{S_N^2 - S_{\bar{x}_n,k}^2}{N-k} = \frac{N-k}{k-1} \cdot \frac{1}{S_N^2 / S_{\bar{x}_n,k}^2 - 1}$$

unormowanych według odpowiednich liczb stopni swobody k - 1 oraz N – k = k(n-1) wariancji średnich oraz średnie wariancji w grupach.

Podsumowanie

(3) Obliczony stosunek wariancji porównywany jest z wartością krytyczną

$$\boxed{F(1-\alpha; k-1, N-k)}$$

z F rozkładu Fischera – Snedykora dla poziomu ufności α.

$$\boxed{Fs \le F(1-\alpha; k-1, N-k)}$$

Jeśli wtedy na poziomie istotności α nie ma podstaw odrzucić hipotezę o nieobecności korelacji pomiędzy obserwacjami. (Z dużym prawdopodobieństwem obserwacje niekorelowane).

$$\boxed{Fs > F(1-\alpha; k-1, N-k)}$$

Jeśli wtedy na poziomie istotności α należy odrzucić hipotezę o nieobecności korelacji pomiędzy obserwacjami. (Z dużym prawdopodobieństwem obserwacje są wzajemnie skorelowane).

Podsumowanie

(4) Po stwierdzeniu skorelowania w sposób iteracyjny dobieramy długość podserii n w taki sposób, żeby skorelowanie obserwacji odstępujące na n pozycji było nieistotnym.

Po obliczaniu wartości średniej wariancji obserwacji nieskorelowanych (w wierszach)

$$\boxed{\overline{S_l^2} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} S_l^2}$$

skorygowane oszacowanie niepewności standardowej wartości średniej obliczmy wg wzoru:

$$\boxed{u_A(\overline{x}) = \sqrt{\frac{\overline{S_l^2}}{k}} = \sqrt{\overline{S_l^2} \cdot \frac{n}{N}}}$$