

W3. Zasady obliczania niepewności wyniku pomiaru metodą statystyczną - typu A

1. **Wstęp. Wartość rzeczywista, Błąd pomiaru i niepewność pomiaru**
2. **Obliczanie niepewności standardowej metodą statystyczną (typu A) przy znanej wartości standardowego odchylenia obserwacji. Przykład 1a**
3. **Obliczanie niepewności standardowej metodą statystyczną (typu A) przy braku znajomości standardowego odchylenia obserwacji. Przykład 1b**

M.DOROZHOVETS

Wstęp. Wartość rzeczywista, wynik pomiaru, błąd pomiaru i niepewność pomiaru

Wartość rzeczywista (prawdziwa) wielkości – jest to idealne odwzorowanie miary (rozmiaru) wielkości przy idealnej jednostce miary.

Wartość rzeczywistą (prawdziwą) można byłoby uzyskać przy istnieniu idealnych narzędzi pomiarowych oraz idealnych warunków ich wykorzystania.

Wstęp. Wartość rzeczywista, wynik pomiaru, błąd pomiaru i niepewność pomiaru

W praktyce wartość rzeczywista nie jest znana z różnych przyczyn:

- niedoskonałości narzędzi pomiarowych,
- niepożądanego ich współdziałania z obiektem badanym,
- wpływu innych obiektów i procesów oraz innych.

Nawet najwyższym poziomie hierarchii etalonów wartość rzeczywista jednostek wielkości nie jest znana dokładnie a tylko w przybliżeniu.

Pojęcie wartości rzeczywistej wykorzystuje się podczas analizy teoretycznej pomiarów, zwłaszcza analizy ich dokładności i błędów.

Wstęp. Wartość rzeczywista, wynik pomiaru, błąd pomiaru i niepewność pomiaru

W praktyce, na przykład podczas eksperymentalnego sprawdzania narzędzi pomiarowych (zwłaszcza mierników), oraz w innych zagadnieniach, wykorzystuje się pojęcie „wartość poprawna”.

Wartość poprawna jest to przybliżenie praktyczne wartości wielkości wyznaczone lub wytworzone za pomocą odpowiednich narzędzi pomiarowych, które różni się od wartości rzeczywistej wystarczająco mało, tak że dla konkretnego zagadnienia pomiarowego może być wykorzystane zamiast wartości rzeczywistej.

Wartość poprawną można wyznaczyć wykorzystując narzędzi pomiarowe o większej dokładności, dokładniej uwzględniając warunki pomiarowe oraz wzajemne wpływy narzędzi pomiarowych, obiektu pomiarowego oraz innych obiektów i procesów.

Wstęp. Wartość rzeczywista, wynik pomiaru, błąd pomiaru i niepewność pomiaru

Wynik pomiaru

Wynik pomiaru – jest wyznaczona eksperymentalnie (w razie potrzeby z wykorzystaniem odpowiednich obliczeń) oceną miary wielkości mierzonej (wartość liczbowej wraz z jednostką), która zwiiera też pewną miarę dokładności (lub niedokładności).

Często, żeby podkreślić eksperymentalne pochodzenie wyniku pomiaru, otrzymana wartość wielkości nazywana jest **zmierzoną wartością wielkości**.

Wstęp. Wartość rzeczywista, wynik pomiaru, błąd pomiaru i niepewność pomiaru

Wynik pomiaru

Z porównania definicji „wynik pomiaru” i „wartość wielkości mierzonej” można zauważyć, że są one bardzo bliskimi.

Jednak pojęcie wyniku pomiaru jest szersze, ponieważ oprócz wyznaczania miary wielkości, ono przewiduje wyznaczania i podanie pewnej miary jakości (dokładności) pomiaru.

Dokładność pomiaru jest większą wtedy, kiedy wynik pomiaru jest bliższy do wartości rzeczywistej wielkości mierzonej

**Wstęp. Wartość rzeczywista, wynik pomiaru,
błąd pomiaru i niepewność pomiaru**

Parametry jakości wyniku pomiaru

W celu oceny jakości pomiaru wykorzystują negatywne charakterystyki, mianowicie: **błąd pomiaru oraz niepewność wyniku pomiaru**

Błąd pomiaru Δ jest odchyleniem wyniku pomiaru x od wartości rzeczywistej X

$$\Delta = x - X$$

W praktycznych pomiarach błąd nie może być wyznaczony!

W tym wzorze nie jest znana wartość rzeczywista X ,

Jeśli jest ona znana, wtedy nie ma potrzeby wykonywać pomiar!

**Wstęp. Wartość rzeczywista, wynik pomiaru,
błąd pomiaru i niepewność pomiaru**

Parametry jakości wyniku pomiaru

Niepewność wyniku pomiaru $u(x)$ jest miarą rozrzutu wartości wielkości mierzonej wokół wyniku x

$$X = x \pm u(x)$$

W praktycznych pomiarach niepewność wyznaczana jest zawsze!

Do obliczania niepewności nie wymagana znajomość wartości rzeczywistej

Wstęp. Wartość rzeczywista, wynik pomiaru, błąd pomiaru i niepewność pomiaru

Niepewność wyniku pomiaru oznacza wątpliwość co do wartości wyniku pomiaru i ten termin odnosi się zarówno do pojęcia ogólnego jak i do konkretnych ilościowych miar: niepewności standardowej, złożonej oraz rozszerzonej.

Niepewność standardowa $u(x)$ – jest niepewnością wyrażoną w formie odchylenia standardowego wyniku.

Złożona niepewność standardowa $u_c(x)$ wyniku jest określana, gdy wynik pomiaru jest zależny od kilku innych wielkości bezpośrednio mierzonych, równa pierwiastkowi kwadratowemu z sumy wyrazów, będących wariancjami lub kowariancjami tych wielkości z wagami zależnymi od tego jak wynik pomiaru zmienia się wraz ze ich zmianami.

Niepewność rozszerzona $U_p(x)$ określa przedział wokół wyniku pomiaru, od którego oczekuje się, że obejmuje dużą część rozkładu wartości wielkości, które można w uzasadniony sposób przyporządkować wielkości mierzonej.

2. Obliczanie niepewności metodą statystyczną (typu A)

Metoda typu A, lub inaczej metoda statystyczna obliczania niepewności pomiaru jest wykorzystywana kiedy kolejne obserwacji wielkości mierzonej, na przykład wskazania miernika, **nie są stabilnymi tj. charakteryzują się pewnym rozrzutem**

tj. kolejne wyniki obserwacji:

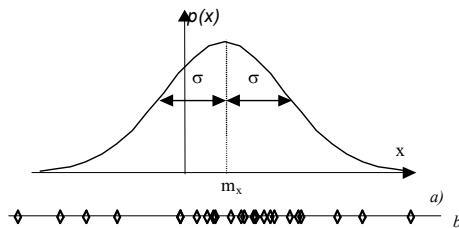
$$x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n$$

wielkości **X** zmieniają się w sposób przypadkowy.

2. Obliczanie niepewności metodą statystyczną (typu A)

We większości praktycznych przypadków zakładano populacje obserwacji o tak zwanym rozkładzie normalnym, lub inaczej, o rozkładzie Gaussa.

Model rozkładu prawdopodobieństwa normalnego (rozkładu Gaussa) (rys.1,a) jest szeroko wykorzystywany tak w teoretycznych badaniach jak i podczas praktycznego opracowania serii wyników obserwacji. Przykładowo na rys.1,b została pokazana jedna z realizacji o 25 wyników obserwacji wielkości mierzonej z normalnym rozkładem prawdopodobieństwa.



Rys.1. Normalny rozkład (rozkład Gaussa) (a) oraz przykładowe usytuowanie 25 wyników obserwacji przy normalnym rozkładzie (b)

2. Obliczanie niepewności metodą statystyczną (typu A)

Przy takim modelu ma miejsce następujące właściwości wyników obserwacji (rozkład jest symetrycznym względem środka o charakterystycznym dzwonko podobnym kształtem):

- 1) – małe odchylenia wyników od wartości średniej są w większym stopniu wiarygodne w porównaniu małej wiarygodności dużych odchyleń od wartości średniej;
- 2) – dodatni i ujemni odchylenia wyników od wartości średniej są jednakowo wiarygodne. Analitycznie rozkład ten opisuje się zależnością

$$p(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}, \quad -\infty < x < \infty \quad (7)$$

gdzie m_x - jest wartością oczekiwaną – punkt wokół którego grupują się wyniki obserwacji, σ_x - jest odchyleniem standardowym – miara rozrzutu wartości obserwacji wokół wartości oczekiwanej.

2. Obliczanie niepewności metodą statystyczną (typu A)

Przy założeniu populacji o rozkładzie normalnym wielkością mierzoną - menzurandem jest parametr położenia tego rozkładu, tj. wartość oczekiwana m_x .

D takiej populacji oraz w wielu innych przypadkach można przyjąć, że najlepszą estymatą wartości oczekiwanej m_x wielkości X , która zmienia się przypadkowo i n niezależnych obserwacji x_i ($i=1, \bar{x}$ 2, 3, ..., n) uzyskano w tych samych warunkach pomiarowych, jest średnia arytmetyczna z tych n obserwacji:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

M.DOROZHOVETS

2.1. Obliczanie niepewności standardowej przy znanym standardowym odchyleniu obserwacji

Jeśli odchylenie standardowe σ_x obserwacji jest znane, na przykład z badań poprzednich, wtedy standardowa niepewność wartości wielkości mierzonej (m_x) $u_A(m_x)$ wyznaczana jest jako odchylenie standardowe σ_x obserwacji dzielone na pierwiastek z liczby obserwacji \sqrt{n} , tj. obliczana według zależności:

$$u_A(m_x) = \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

Jeśli mierzono na przykład napięcie U , lub prąd I , lub rezystancja R itp. wtedy w nawiasach przy niepewności zamiast m_x wpisujemy odpowiedni symbol wielkości: $u_A(U)$ lub $u_A(I)$ lub $u_A(R)$.

M.DOROZHOVETS

2.2. Względna niepewność standardowa

Względna niepewność standardowa wartości wielkości mierzonej – jest wyrażony w % lub ppm stosunek niepewności standardowej wartości do modułu wartości średniej arytmetycznej:

$$u_{A,rel}(m_x) = \frac{u_A(m_x)}{|\bar{x}|} 100\% \text{ (} 10^6 \text{ ppm)}$$

M.DOROZHOVETS

2.3. Niepewność rozszerzona

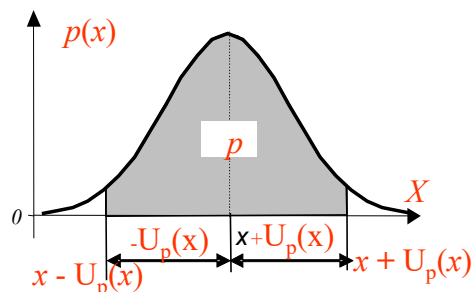
Wg. PRZEWODNIKA z WYRAŻANIA NIEPEWNOŚCI POMIARU- GUM:

Niepewność rozszerzona ($U_p(x)$) jest parametr definiujący przedział wokół wyniku pomiaru, od którego oczekuje się, że obejmie on dużą część rozkładu wartości, które w uzasadniony sposób można przypisać wielkości mierzone.

Ułamek wyznaczający powyższą część rozkładu $p(x)$ można traktować jak określone prawdopodobieństwo lub poziom ufności (p) tego przedziału.

M.DOROZHOVETS

2.3. Niepewność rozszerzona



„rozkład prawdopodobieństwa” $p(x)$ – zwykle jest aproksymacją rozkładu prawdopodobieństwa, na podstawie którego została obliczona niepewność rozszerzona.

M.DOROZHOVETS

2.4. Współczynnik rozszerzenia

PRZEWODNIK WYRAŻANIE NIEPEWNOŚCI POMIARU-GUM:

Zwykle z niepewnością rozszerzoną związany jest współczynnik rozszerzenia (k_p) jako współczynnik liczbowy zastosowany jako mnożnik złożonej ($u_c(x)$) niepewności standardowej w celu otrzymania niepewności rozszerzonej.

$$U_p(x) = k_p \times u_c(x)$$

UWAGA

- 1 – Wartość współczynnika rozszerzenia k_p zależy od rozkładu $p(x)$ oraz poziomu ufności p .
- 2 – Współczynnik rozszerzenia k_p przyjmuje zazwyczaj wartości z zakresu od 2 do 3.

M.DOROZHOVETS

2.4. Współczynnik rozszerzenia i poziom ufności

Terminy przedział ufności i poziom ufności mają specyficzne definicje w statystyce i są tylko wtedy stosowane do przedziału określonego za pomocą U_p , gdy spełnione są pewne warunki, w tym warunek, żeby wszystkie składniki niepewności, które wchodzi do $u_c(y)$ były obliczone metodą typu A.

W metrologii do określenia przedziału ufności, najczęściej stosuje prawdopodobieństwo lub poziom ufności równy $p=0.90$ (90%), $p=0.95$ (95%) oraz $p=0.99$ (99%).

M.DOROZHOVETS

2.5. Niepewność rozszerzona: rozkład normalny, standardowe odchylenie jest znane

Jeśli obserwacje są podporządkowane rozkładowi normalnemu i znane jest standardowe odchylenie σ_x tych obserwacji (np. z badań poprzednich), wtedy współczynnik rozszerzenia k_p do obliczania niepewności rozszerzonej wartości średniej $U_p(x)$

$$U_p(x) = k_p \cdot u_A(x) = k_p \cdot \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

wyznaczany jest z dystrybuanty rozkładu normalnego dla danego poziomu ufności p .

M.DOROZHOVETS

2.5. Niepewność rozszerzona: rozkład normalny, standardowe odchylenie jest znane

Dla wybranych wartości poziomu ufności p od 68.27% do 99.73% w przypadku rozkładu normalnego podano niżej w tabeli.

Tabela G.1 Wartość współczynnika rozszerzenia k_p określającego dla rozkładu normalnego przedział o poziomie ufności p

Poziom ufności p w procentach	Współczynnik rozszerzenia k_p
68,27	1
90	1,645
95	1,960
95,45	2
99	2,576
99,73	3

W przypadku rozkładu prostokątnego z wartością oczekiwaną μ i odchyleniem standardowym $\sigma = a/\sqrt{3}$, gdzie a jest szerokością połówkową rozkładu, poziom ufności p wynosi:

57,74 % dla $k_p = 1$; 95 % dla $k_p = 1,65$,
99 % dla $k_p = 1,71$, i 100 % dla $k_p = 1,73$.

M.DOROZHOVETS

2.5. Niepewność rozszerzona: rozkład normalny, standardowe odchylenie jest znane

W sytuacjach pomiarowych, gdy rozkład prawdopodobieństwa $p(y)$ charakteryzowanego przez y i $u_c(y)$ jest tylko w przybliżeniu normalny (taka sytuacja zdarza się zresztą często w praktyce), można założyć,

że przyjmując $k_p = 2$ tworzy się przedział o poziomie ufności w przybliżeniu równym 95 %,

zaś przyjmując $k_p = 3$ tworzy się przedział o poziomie ufności w przybliżeniu równym 99 %.

M.DOROZHOVETS

2.6. Wynik pomiaru

Wynik pomiaru y (lub x przy pomiarach bezpośrednich, tj.: $y = x$) jest przy tym często umownie podawany jako

$$Y = y \pm U_p(y), \text{ lub } X = x \pm U_p(x),$$

co interpretuje się, iż najlepszą wartością, jaką można przypisać wielkości mierzonej Y (lub X), jest y (lub x), i że

$$y - U_p(y), \text{ do } y + U_p(y), \text{ (} x - U_p(x), \text{ do } y + U_p(x))$$

jest przedziałem, od którego można oczekiwać, że obejmuje dużą część rozkładu wartości, które można w uzasadniony sposób przypisać wielkości mierzonej Y (lub X).

Taki przedział jest także wyrażany jako

$$y - U_p(y) \leq Y \leq y + U_p(y) \text{ lub } x - U_p(x) \leq X \leq y + U_p(x)$$

M.DOROZHOVETS

2.7. Przykład 1a. Obliczanie niepewności standardowej i rozszerzonej przy znajomości standardowego odchylenia obserwacji

W celu zmniejszenia wpływu losowych oddziaływań podczas pomiaru natężenia prądu elektrycznego wykonano i zarejestrowano $n = 25$ wyników niezależnych obserwacji I_i (w mA):

5,048; 5,073; 4,945; 5,019; 4,912; 4,985; 4,951; 5,031;
5,017; 4,963; 4,949; 5,049; 5,027; 4,963; 4,992;
4,997; 5,056; 4,958; 4,997; 4,962; 5,055; 4,950;
5,038; 4,953; 5,090

Odchylenie standardowe obserwacji jest znane z poprzednich badań i jest równe: $\sigma_i = 0.05 \text{ mA}$

M.DOROZHOVETS

2.7. Przykład 1a. Obliczanie niepewności standardowej i rozszerzonej przy znajomości standardowego odchylenia obserwacji

- 1) Najlepszą oceną wartości prądu jest wartość średnia arytmetyczna z obserwacji

$$\bar{I} = \frac{1}{25} \sum_{i=1}^{25} I_i = 4,9992 \text{ mA}$$

- 2) Ponieważ odchylenie standardowe obserwacji jest znane ($\sigma_i=0.05\text{mA}$) niepewność standardowa pomiaru prądu:

$$u_A(I) = \frac{\sigma_i}{\sqrt{n}} = \frac{0.05 \text{ mA}}{\sqrt{25}} = 0.010 \text{ mA}$$

- 3) Względna niepewność standardowa pomiaru prądu:

$$u_{A,rel}(I) = \frac{u_A(I)}{|\bar{I}|} 100\% = \frac{0.010 \text{ mA}}{4.9992 \text{ mA}} 100\% \approx 0.20\%$$

M.DOROZHOVETS

2.7. Przykład 1a. Obliczanie niepewności standardowej i rozszerzonej przy znajomości standardowego odchylenia obserwacji

Niepewność rozszerzona pomiaru prądu dla poziomów ufności: $p_1=0.90$, $p_2=0.95$ i $p_3=0.99$ według tabeli wartości współczynników rozszerzenia dla rozkładu normalnego są równe:

$$k_{p1}=1.65, k_{p2}=1.96, k_{p3}=2.58$$

Dlatego dla obliczonej wartości niepewności standardowej

$$u_A(I) = 0.010 \text{ mA}$$

Niepewności rozszerzone pomiaru prądu są równe odpowiednio:

$$u_{0.90}(I) = 1.65 \cdot 0.010 \text{ mA} = 0.0165 \text{ mA}; u_{0.95}(I) = 1.96 \cdot 0.010 \text{ mA} = 0.0196 \text{ mA}; \\ u_{0.99}(I) = 2.58 \cdot 0.010 \text{ mA} = 0.0258 \text{ mA};$$

M.DOROZHOVETS

2.8. Zasady zaokrąglania niepewności i wyników

W uproszczeniu:

- 1) Zaokrąglenie wartości liczbowych niepewności i wyniku pomiaru dotyczy tylko końcowych wyników
- 2) Najpierw zaokrąglamy wartość liczbową niepewności do dwóch cyfr znaczących – **nie „po przecinku”!**

Wartości liczbowe następných niepewności:

12.34, 2.751, 0.7629, 0.09840, 0.002082

mają po **4 cyfry znaczące**.

Cyfry znaczące – są to wszystkie cyfry liczby oprócz zer na początku tej liczby. Zera w środku i na końcu liczby są znaczącymi.

Podane wyżej wartości liczbowe następných niepewności po zaokrągleniu do 2-ch cyfr znaczących:

12.34≈12, 2.751 ≈2.8, 0.7629 ≈0.76, 0.09970 ≈0.10, 0.002082 ≈0.0021.

M.DOROZHOVETS

2.8. Zasady zaokrąglania niepewności i wyniku. Prezentacja wyniku pomiaru

Po zaokrągleniu obliczonych wyżej niepewności pomiaru prądu są równe:

$$u_{0,90}(I) = 0.0165 \text{ mA} \approx 0.016 \text{ mA}; u_{0,95}(I) = 0.0196 \text{ mA} \approx 0.020 \text{ mA}; u_{0,99}(I) = 0.0258 \text{ mA} \approx 0.026 \text{ mA}.$$

- 3) **Wartość liczbową wyniku zaokrąglamy do tego samego miejsca dziesiątego co i w zaokrąglonej niepewności.**

W przypadku pomiaru prądu wyżej podane niepewności są zaokrąglone do tysięcznych miliampera, tj. do 3-go miejsca dziesiątego, dlatego wartość liczbową wyniku (wartość średnią 4.9992) zaokrąglamy do tysięcznej wartości miliampera, tj. $4.9992 \approx 4.999$

- 4) Wynik pomiaru (po zaokrągleniu!) w uproszczonej formie przedstawiamy w postaci:

Symbol wielkości = (wartość liczbową±niepewność), jednostka, poziom ufności, rozkład prawdopodobieństwa.

Na przykład:

$$I = (4.999 \pm 0.020) \text{ mA}, p = 0.95, \text{ normalny.}$$

Są częściowo inne zasady zaokrąglania, jednak podaną zasadę można przyjąć jako podstawową.

M.DOROZHOVETS

3. Obliczanie niepewności standardowej przy braku znajomości standardowego odchylenia obserwacji

Przy braku znajomości standardowego odchylenia obserwacji najpierw należy obliczyć nieobciążony estymator wariancji obserwacji – eksperymentalna wariancję według wzoru:

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = s_x^2 \frac{n}{n-1}, \quad s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

(s_x^2 jest tak zwanym obciążonym estymatorem)

Wtedy przybliżona standardowa niepewność wartości wielkości mierzonej jest równa eksperymentalnemu odchyleniu standardowemu (pierwiastek z wariancji) dzielonemu na pierwiastek z liczby obserwacji, tj obliczana według przybliżonej zależności:

$$u_A(x) = \sqrt{\frac{S_x^2}{n}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}}$$

M.DOROZHOVETS

3. Obliczanie niepewności standardowej przy braku znajomości standardowego odchylenia obserwacji

Dokładna wartość niepewności standardowej obliczana jest według wzoru :

$$u_A(x) = \frac{s_x}{\sqrt{n-3}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{n-1}{n-3}}$$

Gdzie s_x^2 jest tak zwanym obciążonym estymatorem, obliczonym według wzoru

$$s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = S_x^2 \cdot \frac{n-1}{n}$$

Różnica pomiędzy przybliżoną oraz dokładną wartością jest istotą przy małej liczbie obserwacji, do około 20-30.

Oprócz tego niepewność standardowa w tym przypadku może być obliczona tylko jeśli liczba obserwacji nie jest mniejsza 4

M.DOROZHOVETS

3.1. Niepewność rozszerzona pomiaru przy braku znajomości odchylenia standardowego obserwacji o rozkładzie normalnym

Jeśli obserwacje są podporządkowane rozkładowi normalnemu jednak standardowe odchylenie tych obserwacji nie jest znane a obliczane jego estymatę S_x , wtedy współczynnik rozszerzenia k_p do obliczania niepewności rozszerzonej wartości średniej dla zadanego poziomu ufności p pobierany jest z tabeli dystrybuanty tak zwanego t - rozkładu Studenta o $v=n-1$ (n jest liczbą obserwacji) stopni swobody:

$$k_p = t_p(v) = t_p(n-1)$$

Wtedy niepewność rozszerzona obliczana jest wg. wzoru:

$$U_p(x) = t_p(n-1) \cdot \frac{S_x}{\sqrt{n}}$$

Który jest dokładny.

M.DOROZHOVETS

3.2. Tabela współczynników rozszerzenia $t_p(v)$ z rozkładu Studenta

Liczba st. swob. ν	p - poziom ufności				ν	p - poziom ufności			
	0.9	0.95	0.99	0.999		0.9	0.95	0.99	0.999
1	6.314	12.706	63.657	636.619	18	1.734	2.101	2.878	3.922
2	2.920	4.303	9.925	31.598	19	1.729	2.093	2.861	3.883
3	2.353	3.182	5.841	12.941	20	1.725	2.086	2.845	3.850
4	2.132	2.776	4.604	8.610	21	1.721	2.080	2.831	3.819
5	2.015	2.571	4.032	6.859	22	1.717	2.074	2.819	3.792
6	1.943	2.447	3.707	5.959	23	1.714	2.069	2.807	3.767
7	1.895	2.365	3.499	5.405	24	1.711	2.064	2.797	3.745
8	1.860	2.306	3.355	5.041	25	1.708	2.060	2.787	3.725
9	1.833	2.262	3.250	4.781	26	1.706	2.056	2.779	3.707
10	1.812	2.228	3.169	4.587	27	1.703	2.052	2.761	3.690
11	1.796	2.201	3.106	4.437	28	1.701	2.048	2.763	3.674
12	1.782	2.179	3.055	4.318	29	1.699	2.045	2.756	3.659
13	1.771	2.160	3.012	4.221	30	1.697	2.042	2.750	3.646
14	1.761	2.145	2.977	4.140	40	1.684	2.021	2.704	3.551
15	1.753	2.131	2.947	4.073	60	1.671	2.000	2.660	3.460
16	1.746	2.120	2.921	4.015	120	1.658	1.980	2.617	3.373
17	1.740	2.110	2.898	3.965	∞	1.645	1.960	2.576	3.291

M.DOROZHOVETS

3.3. Przykład 1b

Dla tych samych $n = 25$ wartości obserwacji natężenia prądu elektrycznego:

5,048; 5,073; 4,945; 5,019; 4,912; 4,985; 4,951; 5,031;
5,017; 4,963; 4,949; 5,049; 5,027; 4,963; 4,992;
4,997; 5,056; 4,958; 4,997; 4,962; 5,055; 4,950;
5,038; 4,953; 5,090

Przy braku znajomości odchylenia standardowego obserwacji należy obliczyć niepewność standardową i rozszerzona oraz przedstawić wynik pomiaru.

1) Jak i poprzednio najlepszą oceną wartości prądu jest wartość średnia arytmetyczna z obserwacji:

$$\bar{I} = \frac{1}{25} \sum_{i=1}^{25} I_i = 4,9992 \text{ mA}$$

M.DOROZHOVETS

3.3. Przykład 1b

2) Nieobciążony estymator wariancji obserwacji:

$$S^2(I) = \frac{1}{25-1} \sum_{i=1}^{25} (I_i - \bar{I})^2 = 0.00228312 \text{ mA}^2$$

3) Eksperymentalne odchylenie standardowe:

$$S(I) = \sqrt{S^2(I)} = \sqrt{0.00228312} \text{ mA} = 0.047782 \text{ mA}$$

4) Niepewność standardowa wartości mierzonej – eksperymentalne standardowe odchylenie wartości średniej arytmetycznej:

$$u_A(I) \approx \frac{S(I)}{\sqrt{n}} = \frac{0.047782 \text{ mA}}{\sqrt{25}} = 0.009556 \text{ mA}$$

Dokładna wartość niepewności standardowej:

$$u_A(I) = \frac{S(I)}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{n-1}{n-3}} = 0.009556 \text{ mA} \cdot \sqrt{\frac{25-1}{25-3}} = 0.009981 \text{ mA}$$

M.DOROZHOVETS

3.3. Przykład 1b

5) **Względna niepewność standardowa** wartości średniej – jest wyrażony w % lub ppm stosunek niepewności standardowej wartości średniej arytmetycznej do modułu wartości średniej arytmetycznej:

$$u_{A,rel}(I) = \frac{u_A(I)}{|\bar{I}|} 100\% = \frac{0.009556 \text{ mA}}{4.9992 \text{ mA}} 100\% \approx 0.19\%$$

6) Dla poziomu ufności $p=0.99$ obliczamy **niepewność rozszerzoną**:

Dla liczby obserwacji $n=25$ liczba stopni swobody $\nu=25-1=24$.

Z tabeli rozkładu Studenta wyznaczamy współczynnik rozszerzenia: $t_{0,99}(24) = 2.797$.

Dlatego niepewność rozszerzona pomiaru prądu :

$$u_{0,95}(I) = 2.7974 \cdot 0.009556 \text{ mA} = 0.02673 \text{ mA}$$

M.DOROZHOVETS

3.3. Przykład 1b

7) Wynik pomiaru:

7.1. Najpierw zaokrąglamy wartość liczbową niepewności:

$$0.02673 \approx 0.027$$

7.2. Zaokrąglamy wartość liczbową wyniku (wartości średniej) do 3-go miejsca dziesiętnego:

$$4.9992 \approx 4.999$$

7.3. Wynik:

$$I = (4.999 \pm 0.027) \text{ mA}, p = 0.99, \text{ rozkład t- Studenta.}$$

M.DOROZHOVETS

4. Uwagi do obliczania niepewności metodą typu A

1. Przy założeniu populacji o rozkładzie normalnym najlepszym wynikiem jest wartość średnia z obserwacji losowych niezależnych.
2. Standardowa niepewność wartości mierzonej przy obliczaniu średniej arytmetycznej obserwacji **obliczana jest jako standardowe odchylenie obserwacji dzielone na pierwiastek z liczby obserwacji.**
3. **Jest to minimalna wartość standardowej niepewności tylko dla rozkładu normalnego obserwacji.**
4. Istotne odchylenie rozkładu od normalnego powoduje, że są inne parametry próby z mniejszą standardową niepewnością od niepewności wartości średniej.
5. **Standardowa niepewność wartości średniej istotnie powiększa się przy wzajemnym skorelowaniu obserwacji.**