MACIERZE

Def. Macierzą A nazywamy grupę liczb zapisanych w postaci prostokątnej

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

Liczby a_{ij} zwiemy wyrazami lub współczynnikami macierzy A. W zapisie a_{ij}, literki i, j nazywamy indeksami lub wskaźnikami.

Serie liczb z macierzy A, które są zapisane poziomo, nazywamy wierszami, a serie liczb w pionie to kolumny. Wiersze numerujemy z góry na dół, a kolumny od lewej do prawej. Powyższa macierz A ma więc m wierszy oraz n kolumn. Zapis $m \times n$ zwiemy wymiarem lub formatem macierzy A.

Symbol a_{ij} oznacza wyraz macierzy A będący w i-tym wierszu oraz w j-tej kolumnie.

Przykład. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & 0 & -5 \end{bmatrix}_{3 \times 4}$$

$a_{12} = 0$, $a_{14} = 3$, $a_{23} = -1$, $a_{31} = -3$, $a_{34} = -5$.

Definicja. Macierz A nazywamy kwadratową, jeśli $m = n$ tzn.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

Liczba n nazywana jest **stopniem** macierzy kwadratowej. Serię liczb $(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ zwiemy **przekątną** lub diagonalą.

Macierz A postaci

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

to macierz **trójkątna górna**

same zera

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

same zera

← macierz **trójkątna dolna**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}$$

zera

← **macierz diagonalna**

inna nazwa to: **przekątniowa**

zera

$$J_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

← **macierz jednostkowa**

np. $J_1 = [1]$, $J_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $J_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ itd.

Czasami macierze jednostkowe oznaczamy krótko przez J lub I. Tak więc macierz diagonalna to taka macierz która jest równocześnie trójkątna dolna i górna.

Działania na macierzach

Jeśli dwie macierze A i B mają jednakowy wymiar, to można je dodać i odjąć; wyniki tych działań oznaczamy przez $A+B$ i $A-B$ i nazywamy sumą i różnicą.

Przykład. Niech

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$A+B=\begin{bmatrix} 2+1 & 1-1 & -1+2 \\ -3+1 & 2+1 & 4+3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A-B=\begin{bmatrix} 2-1 & 1-(-1) & -1-2 \\ -3-1 & 2-1 & 4-3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ponadto, każdą macierz A można wymnożyć przez dowolną liczbę a, wynik oznaczamy przez $a \cdot A$.

Przykład. Niech

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}. \quad \text{Wtedy} \quad 2A=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -6 & -2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}, \quad -3A=\begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 9 & 3 \\ -6 & -12 \end{bmatrix}$$

Jeśli macierz A ma wymiar $m \times n$, a B wymiar $n \times k$, to macierze te można wymnożyć, a wynik tego działania nazywamy iloczynem i oznaczamy przez $A \cdot B$. Wynik ma wymiar $m \times k$.

Oznaczenia: $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $B=[b_{ij}]_{n\times k}$.

Na potrzeby poniższej definicji oznaczmy wynik $A \cdot B$ przez C, tzn. $A \cdot B = C = [c_{ij}]_{m \times k}$.

Współczynniki wyniku c_{ij} obliczamy ze wzoru:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj}$$

Tak więc, aby obliczyć c_{ij} wymnażamy liczby z i-tego wiersza macierzy A poprzez odpowiadające im liczby z j-tej kolumny macierzy B, a otrzymane iloczyny dodajemy.

Przykład Niech

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 3} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}_{3\times 4}$$

Wymiary macierzy A i B to 2×3 i 3×4 zatem można te macierze wymnożyć, a otrzymany wynik $A \cdot B$ będzie miał wymiar 2×4.

$$c_{11} = 2\cdot 1 + (-1)\cdot 0 + 1\cdot(-1) = 1$$
$$c_{12} = 2\cdot 1 + (-1)\cdot 2 + 1\cdot 2 = 2$$
$$c_{13} = 2\cdot 0 + (-1)\cdot(-1) + 1\cdot 1 = 2$$
$$c_{14} = 2\cdot 2 + (-1)\cdot 1 + 1\cdot(-3) = 0$$
$$c_{21} = -1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 3\cdot(-1) = -4$$
$$c_{22} = -1\cdot 1 + 1\cdot 2 + 3\cdot 2 = 7$$
$$c_{23} = -1\cdot 0 + 1\cdot(-1) + 3\cdot 1 = 2$$
$$c_{24} = -1\cdot 2 + 1\cdot 1 + 3\cdot(-3) = -10$$

czyli

$$A\cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ -4 & 7 & 2 & -10 \end{bmatrix}.$$

Przykład

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}}_{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$ czyli $I \cdot A = A$.

Kolejnym działaniem jest <u>transponowanie</u> macierzy. Macierzą <u>transponowaną</u> do macierzy $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ nazywamy macierz $A^T = [a_{ji}]_{n\times m}$. Tak więc, macierz A^T powstaje z A poprzez zapisanie wierszy macierzy A jako kolumn macierzy A^T, np. jeśli $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$, to $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}$.

<u>Niektóre własności działań na macierzach</u>

1) $A+B = B+A$ 2) $A\cdot B \neq B\cdot A$ (zazwyczaj brak równości)

3) $(A\pm B)\cdot C = A\cdot C \pm B\cdot C$

4) $A\cdot(B\pm C) = A\cdot B \pm A\cdot C$

5) $I\cdot A = A$, $A\cdot I = A$, I – macierz jednostkowa

6) $(A\cdot B)^T = B^T\cdot A^T$

Powyższe równości są prawdziwe (za wyjątkiem 2)), przy dodatkowym założeniu, że formaty tych macierzy są odpowiednio zgodne. Własność 5) głosi, że macierz jednostkowa I pełni rolę elementu neutralnego (czyli rolę „jedynki") w mnożeniu macierzy.

<u>Wyznacznik macierzy kwadratowej</u>

<u>Wyznacznikiem</u> macierzy kwadratowej A wymiaru $n\times n$ nazywamy liczbę $\det A$ obliczaną następująco:

1) jeśli $n=1$, to

$$\det A = \det[a] = a,$$

2) jeżeli $n=2$, to

$$\det A = \det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a\cdot d - b\cdot c$$

3) jeśli $n=3$, to

$$\det A = \det\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

tzn. dodajemy iloczyny liczb z zielonych kresek i odejmujemy iloczyny liczb z czerwonych kresek.

4) jeżeli $n \geq 4$, to

$$\boxed{\det A = (-1)^{i+1}\cdot a_{i1}\cdot \det A_{i1} + (-1)^{i+2}\cdot a_{i2}\cdot \det A_{i2} + \ldots + (-1)^{i+n}\cdot a_{in}\cdot \det A_{in}} \qquad (1)$$

gdzie A_{ij} to macierz powstała z A przez skreślenie i-tego wiersza oraz j-tej kolumny.

Uwagi

1) Wzór (1) nazywamy rozwinięciem Laplace'a względem i-tego wiersza.

2) Wzór (1) można stosować do dowolnego wiersza i także dla $n \geq 2$.

3) Prawdziwe jest też rozwinięcie Laplace'a względem j-tej kolumny

$$\det A = (-1)^{1+j}\cdot a_{1j}\cdot \det A_{1j} + (-1)^{2+j}\cdot a_{2j}\cdot \det A_{2j} + \ldots + (-1)^{n+j}\cdot a_{nj}\cdot \det A_{nj}.$$

4) Sposób obliczania wyznacznika dla $n=3$ zwany jest metodą Sarrusa. Stosuje się ją tylko dla $n=3$. Można ją stosować w alternatywnej wersji polegającej na dopisaniu dwóch pierwszych wierszy na dole i zsumowaniu iloczynów na pewnych trzech ukośnych liniach i odjęciu iloczynów na trzech innych ukośnych liniach. Szczegóły w poniższych przykładach.

5) Czasami wyznacznik macierzy A bywa oznaczany przez $|A|$.

Przykład

1) $\det\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = 2\cdot(-2) - 1\cdot 3 = -4-3 = -7$

2)
$$\det\begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{matrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{matrix} = 3\cdot2\cdot3 + 2\cdot4\cdot(-1) + (-2)\cdot1\cdot1 -$$
$$- (-1)\cdot2\cdot(-2) - 1\cdot4\cdot3 - 3\cdot1\cdot2 =$$
$$= 18-8-2-4-12-6 = -14$$

3)
$$\det\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} = 2\cdot3\cdot2 + (-1)\cdot(-2)\cdot1 + 1\cdot(-2)\cdot2$$
$$\begin{matrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{matrix}$$
$$-1\cdot3\cdot1 - 2\cdot(-2)\cdot2 - (-1)\cdot(-2)\cdot2 =$$
$$= 12+2-4-3+8-4 = 11$$

4)
$$\det\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} =$$
stosujemy rozwinięcie Laplace'a do trzeciej kolumny (bo ma ona 2 zera)

$$= (-1)^{1+3}\cdot\underbrace{a_{13}}_{=2}\cdot\det A_{13} + (-1)^{2+3}\cdot\underbrace{a_{23}}_{=0}\cdot\det A_{23} + (-1)^{3+3}\underbrace{a_{33}}_{=-3}\det A_{33} + (-1)^{4+3}\underbrace{a_{43}}_{=0}\det A_{43}$$

$$= 2\cdot\det A_{13} - \cancel{0\cdot\det A_{23}} + (-3)\cdot\det A_{33} - \cancel{0\cdot\det A_{43}} =$$

$$= 2\cdot\det\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} - 3\det\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} =$$
$$\begin{matrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{matrix}$$

$$= 2\cdot(4+3-4-1-12-(-4)) - 3\cdot(-12-1+6-4-9-2) =$$
$$= 2\cdot(-6) - 3\cdot(-22) = -12+66 = 54$$

Podstawowe własności wyznacznika

1) Wyznacznik macierzy kwadratowej, mającej wiersz (kolumnę) złożoną z samych zer, jest równy 0.
2) Wyznacznik macierzy kwadratowej, w której pewne dwa wiersze (kolumny) są proporcjonalne (oznaczenie: $w_i \sim w_j$) jest równy 0.
3) Wyznacznik macierzy kwadratowej zmieni znak, jeżeli przestawimy między sobą dwie kolumny (dwa wiersze).
4) Z dowolnego wiersza (kolumny) można wyłączyć wspólny czynnik przed wyznacznik.
5) Wyznacznik macierzy nie zmieni się, jeśli do elementów pewnego wiersza (kolumny) dodamy (odejmiemy) odpowiadające im elementy innego wiersza (kolumny) pomnożone przez dowolną liczbę. Oznaczenie dla tej operacji to: $w_i \pm c \cdot w_j$ lub $k_i \pm c \cdot k_j$.
6) Wyznacznik macierzy trójkątnej jest równy iloczynowi liczb z przekątnej.

Dzięki powyższym własnościom, a zwłaszcza 5), można uprościć obliczanie wyznaczników dużych stopni.

Przykład

$$\det\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \left\{ k_4 - k_3 \right\} = \det\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{array}{c} \text{stosujemy} \\ \text{rozwinięcie} \\ \text{Laplace'a} \\ \text{do } w_2 \end{array} \right\}$$

$$= (-1)^{2+3} \cdot 1 \cdot \det\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \left\{ w_3 - 2w_2 \right\} = -\det\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & -5 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$= \{$ stosujemy rozwinięcie Laplace'a do $k_2 \} =$

$$= -(-1)^{2+2} \cdot 1 \cdot \det \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} = -(10 - 18 + 4 + 15 - 3 - 16) = 8$$

Macierze odwrotne

Definicja Macierzą odwrotną do macierzy kwadratowej A wymiaru $n \times n$ nazywamy taką macierz kwadratową, też wymiaru $n \times n$, oznaczaną przez A^{-1}, która spełnia warunki

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = J_n$$

gdzie J_n to macierz jednostkowa stopnia n.

Podstawowe pytanie to: które macierze kwadratowe posiadają macierz odwrotną? jak ją wyliczyć?

Twierdzenie (o macierzy odwrotnej)

1) Macierz A posiada macierz odwrotną $\iff \det A \neq 0$
(takie macierze nazywamy nieosobliwymi)

2) Jeśli macierz A jest nieosobliwa, to

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (A^D)^T$$

gdzie

$$A^D = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & \dots & D_{2n} \\ \dots & & & \\ D_{n1} & D_{n2} & \dots & D_{nn} \end{bmatrix}$$

macierz dopełnień algebraicznych

$D_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det A_{ij}$, zaś A_{ij} jest takie jak w rozwinięciu Laplace'a.