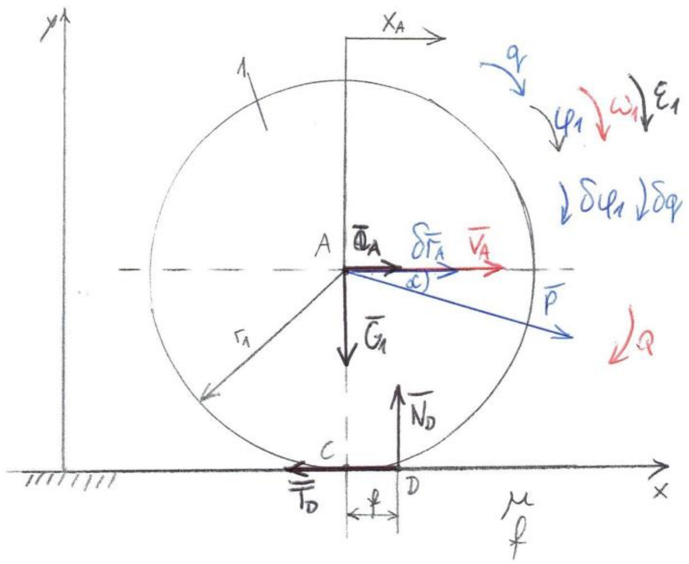
Równania Lagrange'a drugiego rodzaju

Zad. 1.

Krążek 1 o znanym ciężarze i promieniu r_1 toczy się w prawo po płaskiej powierzchni pod wpływem siły P o kierunku jak pokazano na rysunku. Występuje zjawisko tarcia suchego oraz tarcia toczenia. Wyznacz kątowe parametry ruchu krążka 1 stosując równania Lagrange'a drugiego rodzaju.



Dane:

G_1, P [N]

r_1, f [m]

μ [-]

α [rad]

Szukane:

$\varphi_1 = ?$

Szukamy kątowych parametrów ruchu bryły 1.

Rozwiązanie:

a) Krążek toczy się bez poślizgu, jest więc w ruchu płaskim. Przyjmujemy interpretację ruchu płaskiego jako ruchu, w którym występuje przemieszczenie środka masy bryły w prawo (x_A) oraz obrót bryły wokół środka masy (φ_1). Wybieramy współrzędną uogólnioną q, q= φ_1. Przyjmujemy układ współrzędnych na rysunku w nieruchomym punkcie. Zaznaczamy podstawowe realizowane parametry ruchu, jak przemieszczenie środka masy x_A oraz kąt obrotu krążka φ_1. Wprowadzamy wektory prędkości punktów charakterystycznych oraz wektory prędkości kątowych brył niezbędne do rozwiązania zadania, jak również wektory przyspieszeń. Wprowadzamy wektory przesunięć przygotowanych δr_A, $\delta\varphi_1$, oraz wektor uogólnionego przesunięcia przygotowanego δq, przy czym δq= $\delta\varphi_1$. Możemy teraz wprowadzić na rysunku wszystkie wektory sił prawdziwych: czynnych (P, G_1) oraz biernych (T_D, N_D).

b) Zapisujemy ogólną formę równania Lagrange'a drugiego rodzaju:

$$1)\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial E}{\partial q} = Q$$

Uwaga: Ponieważ opisujemy ruch bryły o jednym stopniu swobodny ze względu na narzucone więzy, przy współrzędnej uogólnionej pominięto indeks j, ponieważ jest tylko jedna współrzędna uogólniona i będziemy mieli jedno równanie Lagrange'a.

c) Zapisujemy równania więzów siłowych, jeżeli takie wynikają z przyjętego modelu, oraz zapisujemy wartości wielkości niezbędnych do rozwiązania zadania:

2) $T_D \leqslant \mu N_D$

3) $N_D - G_1 - P\sin\alpha = 0$

4) $N_D = G_1 + P\sin\alpha$

d) Zapisujemy równania więzów kinematycznych narzuconych na prędkości:

5) $v_A = \omega_1 r_1$

Różniczkując jednokrotnie względem czasu równanie (5), otrzymując równania więzów kinematycznych narzuconych na przyspieszenia w następującej formie:

6) $\ddot{x}_A = \ddot{\varphi}_1 r_1$

Ponadto zapisujemy równania więzów narzuconych na przesunięcia przygotowane. Należy mieć na uwadze, że wektor przesunięcia przygotowanego interpretujemy jako iloczyn wektora prędkości możliwej i bezwymiarowego współczynnika λ. W analizowanym przypadku otrzymamy więc:

7) $\delta r_A = \delta\varphi_1 r_1 = \delta q r_1$

Wartość wektora przesunięcia przygotowanego p. A wyrażono w funkcji wartości wektora uogólnionego przesunięcia przygotowanego.

e) Wyznaczamy energię kinetyczną bryły:

8) $E = \frac{1}{2} m_1 v_A^2 + \frac{1}{2} J_A \dot{\varphi}_1^2$

9) $J_A = \frac{1}{2} m_1 r_1^2 = \frac{G_1}{2g} r_1^2$

10) $E = \frac{1}{2}\frac{G_1}{g}(r_1\dot{\varphi}_1)^2 + \frac{1}{2}\frac{G_1}{2g} r_1^2 \dot{\varphi}_1^2 =$

$= \frac{1}{2}\frac{G_1}{g} r_1^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{4}\frac{G_1}{g} r_1^2 \dot{\varphi}_1^2 = \frac{3}{4}\frac{G_1}{g} r_1^2 \dot{\varphi}_1^2$

f) Wyznaczamy siłę uogólnioną działającą na bryłę, mając na uwadze wybrane uogólnione przesunięcie przygotowane:

11) $\delta L = \bar{P}_1 \delta \bar{r}_A + M_A \delta\varphi_1 = Q\delta q$

12) $\delta L = (P\cos\alpha - T_D)\delta r_A + (T_D r_1 - N_D f)\delta\varphi_1 =$

$= (P\cos\alpha - \cancel{T_D}) r_1 \delta\varphi_1 + (\cancel{T_D r_1} - N_D f)\delta\varphi_1 =$

$= (P\cos\alpha\, r_1 - \{G_1 + P\sin\alpha\} f)\delta q = Q\delta q$

13) $Q = P\cos\alpha\, r_1 - (G_1 + P\sin\alpha) f$

g) Wyznaczamy pozostałe człony równania Lagrange'a:

$$14)\ \frac{\partial E}{\partial \dot{q}} = \frac{3}{4}\frac{G_1}{g} r_1^2 (2\dot{\varphi}_1)$$

$$15)\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{3}{2}\frac{G_1}{g} r_1^2 \frac{d}{dt}\left(\dot{\varphi}_1\right) = \frac{3}{2}\frac{G_1}{g} r_1^2 \ddot{\varphi}_1$$

$$16)\ \frac{\partial E}{\partial q} = 0$$

Uwaga: W równaniu (14) różniczkujemy E względem prędkości uogólnionej. Energia kinetyczna to iloczyn stałej ze względu na prędkość uogólnioną i prędkości uogólnionej podniesionej do kwadratu. Stałą przenosimy przed znak różniczkowania i wyznaczamy pochodną z funkcji kwadratowej prędkości uogólnionej. W równaniu (15) różniczkujemy względem czasu równanie (14), więc wartość wektora prędkości uogólnionej zamienia się w wartość wektora przyspieszenia uogólnionego. Równanie (16) wynika z faktu, że energia kinetyczna E nie jest funkcją q (współrzędnej uogólnionej, czyli φ_1). W pewnych przypadkach może się zdarzyć, że E będzie funkcją q, wtedy człon z równania (16) będzie niezerowy.

h) Podstawiamy do równania (1), otrzymujemy dynamiczne równanie ruchu w formie:

$$17)\ \frac{3}{2}\frac{G_1}{g} r_1^2 \ddot{\varphi}_1 = P r_1 \cos\alpha - (G_1 + P\sin\alpha) f$$

i) Wyznaczamy wartość wektora przyspieszenia kątowego krążka 1 w formie:

$$18)\ \ddot{\varphi}_1 = \frac{2g}{3 G_1 r_1^2}\left[P r_1 \cos\alpha - (G_1 + P\sin\alpha) f\right] \quad \left[\frac{rad}{s^2}\right]$$

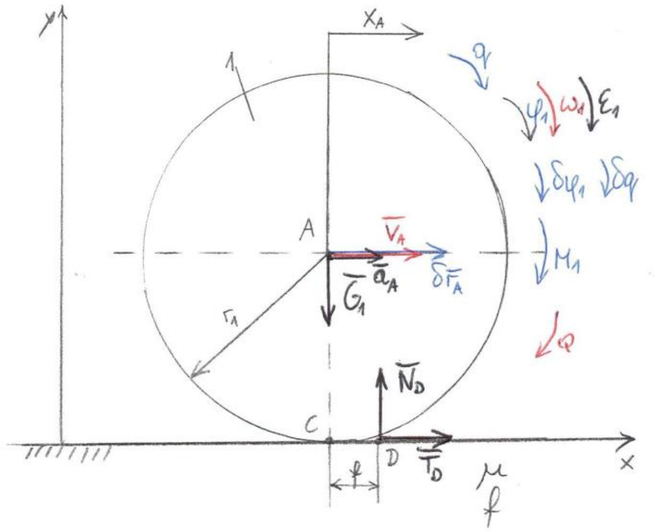
Na tym etapie w celu autokorekty warto dokonać sprawdzenia jednostek:

$$\left[\frac{\frac{m}{s^2}\cdot[N\cdot m]}{N\cdot m^2} = \frac{rad}{s^2}\right]$$

Dalsza część rozwiązania przebiega jak w zad. 1 z zasady równowagi kinetostatycznej.

Zad. 2.

Krążek 1 o znanym ciężarze i promieniu r_1 toczy się w prawo po płaskiej powierzchni pod wpływem momentu (pary sił) M_1. Występuje zjawisko tarcia suchego oraz tarcia toczenia. Wyznacz kątowe parametry ruchu krążka 1 stosując równania Lagrange'a drugiego rodzaju.



Dane:

G_1 [N]

M_1 [Nm]

r_1, f [m]

μ [-]

Szukane:

φ_1 = ?

Szukamy kątowych parametrów ruchu bryły 1.

Rozwiązanie:

a) Krążek toczy się bez poślizgu, jest więc w ruchu płaskim. Przyjmujemy układ współrzędnych na rysunku w nieruchomym punkcie. Zaznaczamy podstawowe realizowane parametry ruchu, jak przemieszczenie środka masy x_A oraz kąt obrotu krążka φ_1. Wybieramy współrzędną uogólnioną q, q= φ_1. Wprowadzamy wektory prędkości punktów charakterystycznych oraz wektory prędkości kątowych brył niezbędne do rozwiązania zadania, jak również wektory przyspieszeń. Wprowadzamy wektory przesunięć przygotowanych δr_A oraz $\delta\varphi_1$, oraz wektor uogólnionego przesunięcia przygotowanego δq, przy czym δq= $\delta\varphi_1$. Możemy teraz wprowadzić na rysunku wszystkie wektory sił prawdziwych: czynnych (G_1) oraz biernych (T_D, N_D), jak również wektor momentu M_1.

b) Zapisujemy ogólną formę równania Lagrange'a drugiego rodzaju:

$$1)\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial E}{\partial q} = Q$$

Uwaga: Ponieważ opisujemy ruch bryły o jednym stopniu swobodny ze względu na narzucone więzy, przy współrzędnej uogólnionej pominięto indeks j, ponieważ jest tylko jedna współrzędna uogólniona i będziemy mieli jedno równanie Lagrange'a.

c) Zapisujemy równania więzów siłowych, jeżeli takie wynikają z przyjętego modelu, oraz zapisujemy wartości wielkości niezbędnych do rozwiązania zadania:

$$2)\quad T_D \leq \mu N_D$$

$$3)\quad N_D - G_1 = 0$$

$$4)\quad N_D = G_1$$

d) Zapisujemy równania więzów kinematycznych narzuconych na prędkości:

$$5)\quad v_A = \omega_1 r_1$$

Różniczkując jednokrotnie względem czasu równanie (5), otrzymując równania więzów kinematycznych narzuconych na przyspieszenia w następującej formie:

$$6)\quad \ddot{x}_A = \ddot{\varphi}_1 r_1$$

Ponadto zapisujemy równania więzów narzuconych na przesunięcia przygotowane. Należy mieć na uwadze, że wektor przesunięcia przygotowanego interpretujemy jako iloczyn wektora prędkości możliwej i bezwymiarowego współczynnika λ. W analizowanym przypadku otrzymamy więc:

$$7)\quad \delta r_A = \delta\varphi_1 r_1 = \delta q r_1$$

Wartość wektora przesunięcia przygotowanego p. A wyrażono w funkcji wartości wektora uogólnionego przesunięcia przygotowanego.

e) Wyznaczamy energię kinetyczną bryły:

$$8)\quad E = \frac{1}{2} m_1 v_A^2 + \frac{1}{2} J_A \dot{\varphi}_1^2$$

$$9)\quad J_A = \frac{1}{2} m_1 r_1^2 = \frac{G_1}{2g} r_1^2$$

$$10)\quad E = \frac{1}{2}\frac{G_1}{g}(r_1\dot{\varphi}_1)^2 + \frac{1}{2}\frac{G_1}{2g} r_1^2 \dot{\varphi}_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{G_1}{g} r_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{4}\frac{G_1}{g} r_1^2 \dot{\varphi}_1^2 = \frac{3}{4}\frac{G_1}{g} r_1^2 \dot{\varphi}_1^2$$

f) Wyznaczamy siłę uogólnioną działającą na bryłę, mając na uwadze wybrane uogólnione przesunięcie przygotowane:

$$11)\quad \delta L = \bar{P}_1 \delta\bar{r}_A + M_A \delta\varphi_1 = Q\delta q$$

$$12)\quad \delta L = T_D \delta r_A + (M_1 - T_D r_1 - N_D f)\delta\varphi_1 =$$

$$= \cancel{T_D r_1}\delta\varphi_1 + (M_1 - \cancel{T_D r_1} - N_D f)\delta\varphi_1 =$$

$$= (M_1 - G_1 f)\delta q = Q\delta q$$

$$13)\quad Q = M_1 - G_1 f$$

g) Wyznaczamy pozostałe człony równania Lagrange'a:

$$14)\quad \frac{\partial E}{\partial \dot{q}} = \frac{3}{4}\frac{G_1}{g} r_1^2 (2\dot{\varphi}_1)$$

$$15)\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{3}{2}\frac{G_1}{g} r_1^2 \frac{d}{dt}(\dot{\varphi}_1) = \frac{3}{2}\frac{G_1}{g} r_1^2 \ddot{\varphi}_1$$

$$16)\quad \frac{\partial E}{\partial q} = 0$$

Uwaga: W równaniu (14) różniczkujemy E względem prędkości uogólnionej. Energia kinetyczna to iloczyn stałej ze względu na prędkość uogólnioną i prędkości uogólnionej podniesionej do kwadratu. Stałą przenosimy przed znak różniczkowania i wyznaczamy pochodną z funkcji kwadratowej prędkości uogólnionej. W równaniu (15) różniczkujemy względem czasu równanie (14), więc wartość wektora prędkości uogólnionej zamienia się w wartość wektora przyspieszenia uogólnionego. Równanie (16) wynika z faktu, że energia kinetyczna E nie jest funkcją q (współrzędnej uogólnionej, czyli φ_1). W pewnych przypadkach może się zdarzyć, że E będzie funkcją q, wtedy człon z równania (16) będzie niezerowy.

h) Podstawiamy do równania (1), otrzymujemy dynamiczne równanie ruchu w formie:

$$17)\quad \frac{3}{2}\frac{G_1}{g} r_1^2 \ddot{\varphi}_1 = M_1 - G_1 f$$

i) Wyznaczamy wartość wektora przyspieszenia kątowego krążka 1 w formie:

$$18)\quad \ddot{\varphi}_1 = \frac{2g}{3G_1 r_1^2}\left[M_1 - G_1 f\right] \quad \left[\frac{rad}{s^2}\right]$$

Na tym etapie w celu autokorekty warto dokonać sprawdzenia jednostek:

$$\left[\frac{\frac{m}{s^2}\cdot[N\cdot m]}{N\cdot m^2} = \frac{rad}{s^2}\right]$$

Dalsza część rozwiązania przebiega jak w zad. 2 z zasady równowagi kinetostatycznej.

Zad. 3.

Pokazany na rysunku układ brył o znanych ciężarach i znanej geometrii pozostaje w ruchu. Krążek 1 o zróżnicowanej średnicy toczy się bez poślizgu po chropowatym podłożu. Występuje zjawisko tarcia suchego i tarcia toczenia. Na krążek 1 działa siła P o znanej wartości, zaczepiona w punkcie A, o kierunku jak pokazano na rysunku. Krążek 2 obraca się w lewo. Bryła 3 przemieszcza się po równi o kącie nachylenia β. Powierzchnie równi i bryły są chropowate. Wyznacz kątowe parametry ruchu bryły 2 stosując równania Lagrange'a drugiego rodzaju.

Dane:

G_1, G_2, G_3, P [N]

R_1, r_1, r_2, f, i_A[m]

μ [-]

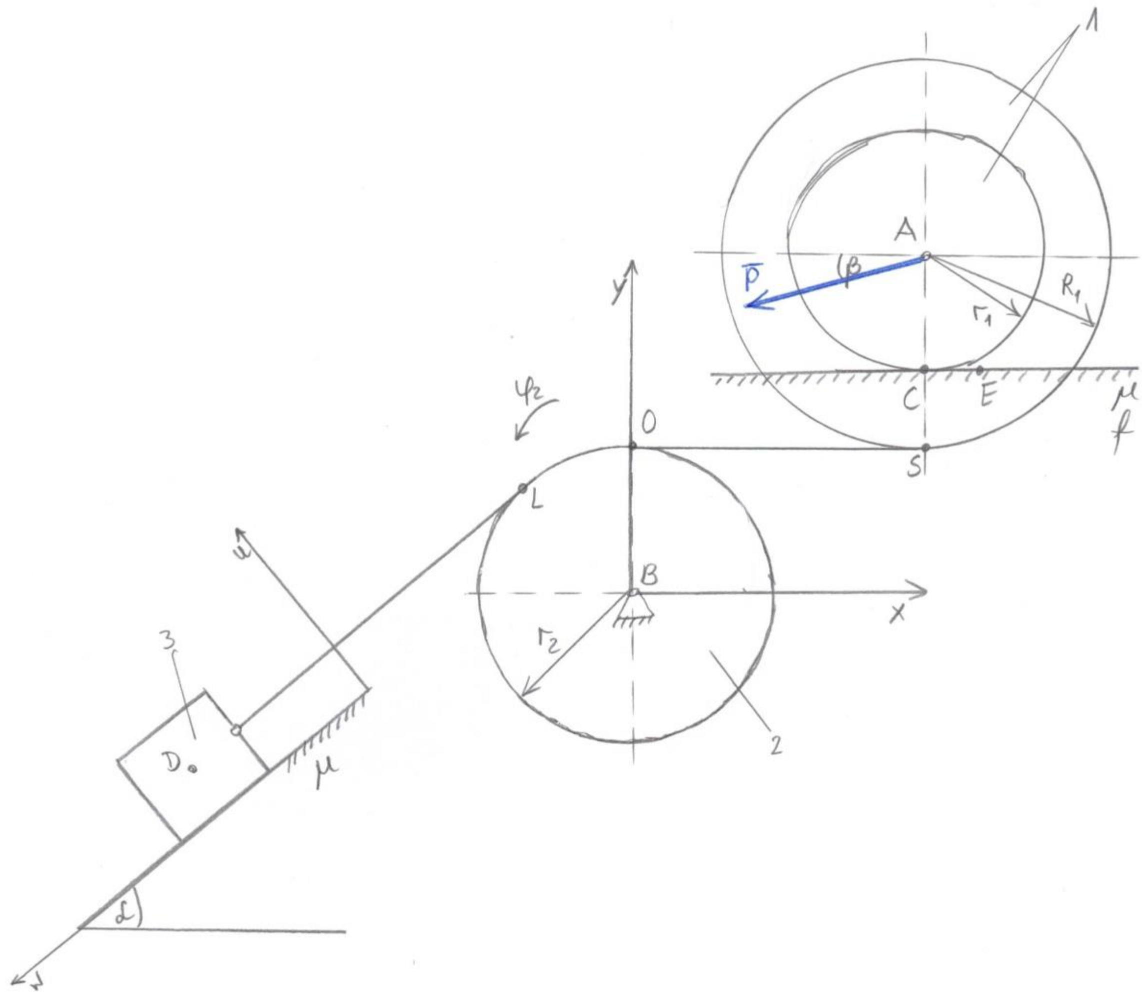
α,β [rad]

zerowe warunki początkowe

Szukane:

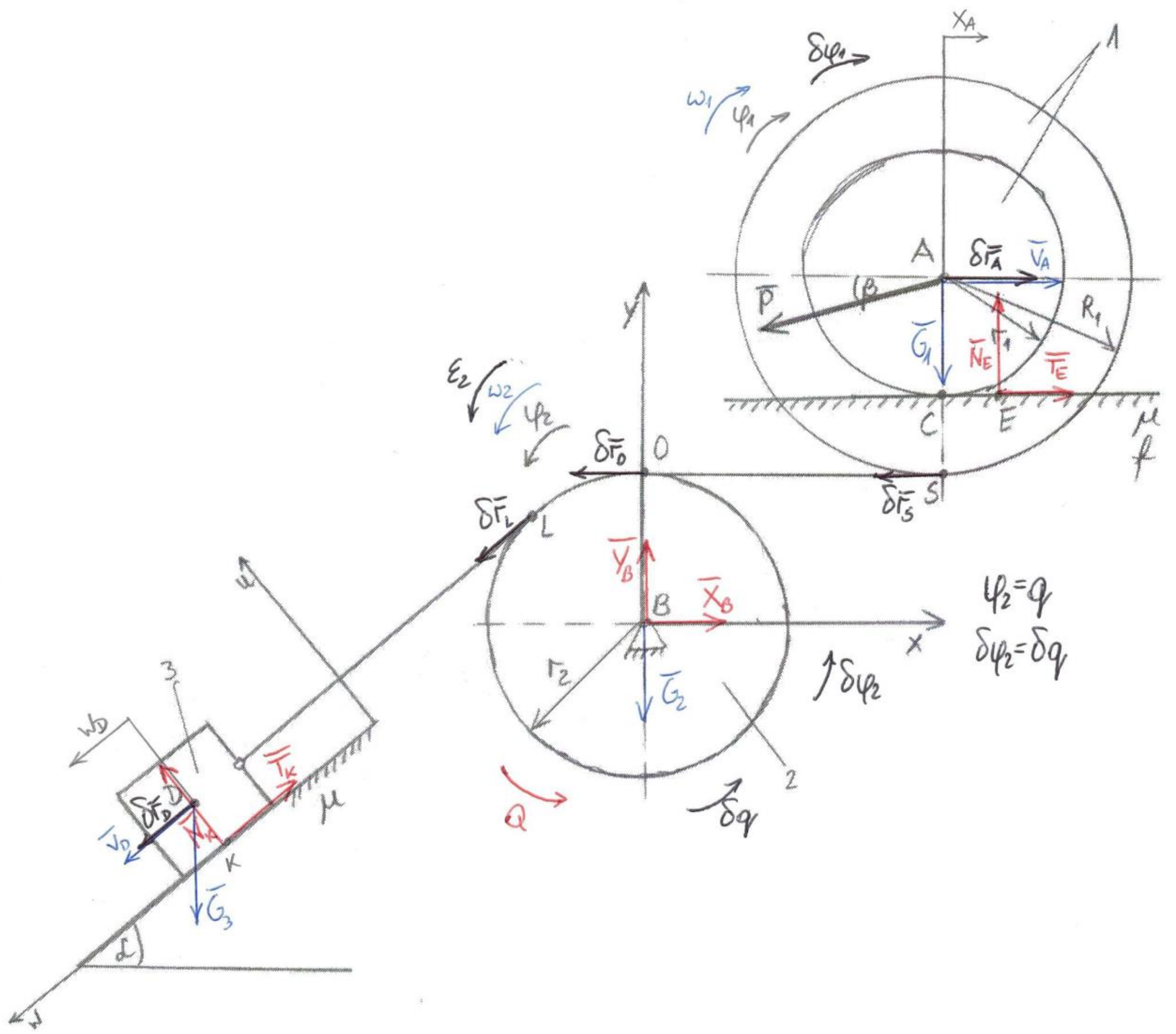
φ_2 = ?

Szukamy kątowych parametrów ruchu bryły 2.



Rozwiązanie:

a) Przyjmujemy układ współrzędnych xy na rysunku w nieruchomym punkcie, np. punkcie B. Przyjmujemy pomocniczy układ współrzędnych uw związany z równią. Krążek 2 obraca się w lewo. Krążek 1 toczy się bez poślizgu, jest więc w ruchu płaskim. Przyjmujemy interpretację ruchu płaskiego jako ruchu, w którym występuje przemieszczenie środka masy bryły w prawo (x_A) oraz obrót bryły wokół środka masy (φ_1). Bryła 3 zsuwa się z równi. Zaznaczamy podstawowe realizowane parametry ruchu, jak przemieszczenie środka masy x_A, kąt obrotu krążka 1 φ_1, kąt obrotu krążka 2 φ_2, oraz realizowane przemieszczenie punktu D, w_D. Wprowadzamy wektory prędkości punktów charakterystycznych oraz wektory prędkości kątowych brył niezbędne do rozwiązania zadania, jak również wektory przyspieszeń (ε_2). Wprowadzamy wektory przesunięć przygotowanych δr_A, $\delta\varphi_1$, $\delta\varphi_2$=δq, oraz δr_D. Możemy wprowadzić na rysunku wszystkie wektory sił prawdziwych: czynnych (G_1, G_2, G_3, P) oraz biernych (T_E, N_E, T_K, N_K, X_A, Y_A), możemy również zaznaczyć siłę uogólnioną Q, która ze względu na przyjętą współrzędną uogólnioną będzie momentem siły. Nie jest konieczne zaznaczanie na rysunku sił wewnętrznych układu sił, jeżeli te nie wykonują pracy przygotowanej.



b) Zapisujemy ogólną formę równania Lagrange'a drugiego rodzaju:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial E}{\partial q} = Q$$

Uwaga: Ponieważ opisujemy ruch bryły o jednym stopniu swobodny ze względu na narzucone więzy, przy współrzędnej uogólnionej pominięto indeks j, ponieważ jest tylko jedna współrzędna uogólniona i będziemy mieli jedno równanie Lagrange'a.

c) Wyznaczamy siłę uogólnioną. Zapisujemy ogólne równanie w którym przyrównujemy sumę prac przygotowanych podukładów sił działających na poszczególne bryły do pracy przygotowanej jaką wykonuje siła uogólniona Q na uogólnionym przesunięciu przygotowanym δq:

$$1)\ \delta L = \sum_{i=1}^{n} \delta L_i = Q_1 \delta q_1 = Q\delta q$$

$$2)\ \delta L = \bar{P}_1 \delta \bar{r}_A + M_A \delta\varphi_1 + M_B \delta\varphi_2 + \bar{P}_3 \delta \bar{r}_D = Q\delta q$$

Uwaga: Zapisując zależność (2) zwracamy uwagę na indeksy przy poszczególnych symbolach.

d) Podstawiamy do równania (2) rzuty wektorów sił i momentów wynikające z rysunku:

$$3)\ \delta L = (T_E - P\cos\beta)\delta r_A + (-N_E f - T_E r_1)\delta\varphi_1 + (G_3 \sin\alpha - T_k)\delta r_D = Q\delta q$$

e) Zapisujemy równania więzów siłowych, jeżeli takie wynikają z przyjętego modelu, oraz zapisujemy wartości wielkości niezbędnych do rozwiązania zadania:

$$4)\ N_E - P\sin\beta - G_1 = 0$$

$$5)\ N_k - G_3\cos\alpha = 0$$

$$6)\ T_E \leq \mu N_E$$

$$7)\ T_k = \mu N_k$$

Uwaga: Zależności (4) i (5) wynikają z równań równowagi kintostatycznej na kierunkach prostopadłych do powierzchni realizowanego ruchu.

f) Zapisujemy równania więzów kinematycznych narzuconych na przesunięcia przygotowane:

$$8)\ \delta\bar{r}_D = \delta\bar{r}_L$$

$$9)\ \delta r_D = \delta\varphi_2 r_2$$

$$10)\ \delta\bar{r}_0 = \delta\bar{r}_S$$

$$11)\ \delta\varphi_2 r_2 = \delta\varphi_1 (R_1 - r_1)$$

$$12)\ \delta\varphi_1 = \delta\varphi_2 \frac{r_2}{R_1 - r_1}$$

$$13)\ \delta r_A = \delta\varphi_1 r_1 = \delta\varphi_2 \frac{r_1 r_2}{R_1 - r_1}$$

g) Wyznaczamy siłę uogólnioną Q:

$$14)\quad \delta L = (\cancel{T_E} - P\cos\beta)\frac{r_1 r_2}{R_1 - r_1}\delta\varphi_2 + (-N_E f - \cancel{T_E r_1})\frac{r_2}{R_1 - r_1}\delta\varphi_2 + (G_3 \sin\alpha - T_K) r_2 \delta\varphi_2 = Q\delta q$$

$$15)\quad \delta L = \left[-P\cos\beta \frac{r_1 r_2}{R_1 - r_1} - (P\sin\beta + G_1) f \frac{r_2}{R_1 - r_1} + (G_3 \sin\alpha - \mu G_3 \cos\alpha) r_2\right]\delta\varphi_2 = Q\,\delta q$$

Biorąc pod uwagę, że:

$$\delta\varphi_2 = \delta q$$

otrzymujemy:

$$16)\quad Q = G_3 r_2 (\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - P\frac{r_1 r_2}{R_1 - r_1}\cos\beta - (P\sin\beta + G_1) f \frac{r_2}{R_1 - r_1}$$

Na tym etapie warto sprawdzić jednostkę we wszystkich członach rozwiązania. Jednostka to [Nm], gdyż siła uogólniona Q jest momentem siły (ze względu na przyjętą współrzędną uogólnioną).

h) Wyznaczamy energię kinetyczną bryły:

$$17)\quad E = \sum_{i=1}^{n} E_i$$

$$18)\quad E = \frac{1}{2} J_A \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_1 V_A^2 + \frac{1}{2} J_B \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2} m_3 V_D^2$$

Masowe momenty bezwładności wynoszą odpowiednio:

$$19)\quad J_A = m_1 i_A^2 = \frac{G_1}{g} i_A^2$$

$$20)\quad J_B = \frac{1}{2} m_2 r_2^2 = \frac{G_2}{2g} r_2^2$$

Na podstawie równań więzów kinematycznych narzucony na przesunięcia przygotowane możemy zapisać wybrane równania więzów narzuconych na prędkości:

$$21)\quad V_D = \omega_2 r_2$$

$$22)\quad \omega_1 = \omega_2 \frac{r_2}{R_1 - r_1}$$

$$23)\quad V_A = \omega_2 \frac{r_1 r_2}{R_1 - r_1}$$

Wyznaczamy energię kinetyczną w funkcji prędkości uogólnionej

$$24)\quad E = \frac{1}{2}\frac{G_1}{g} i_A^2 \left(\frac{r_2}{R_1 - r_1}\right)^2 \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2}\frac{G_1}{g}\left(\frac{r_1 r_2}{R_1 - r_1}\right)^2 \dot{\varphi}_2^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{G_2}{2g} r_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2}\frac{G_3}{g} r_2^2 \dot{\varphi}_2^2 =$$

$$= \frac{1}{2g}\left[G_1 (i_A^2 + r_1^2)\left(\frac{r_2}{R_1 - r_1}\right)^2 + \frac{1}{2} G_2 r_2^2 + G_3 r_2^2\right]\dot{\varphi}_2^2$$

i) Wyznaczamy pozostałe człony równania Lagrange'a:

$$25)\quad \frac{\partial E}{\partial \dot{q}} = \frac{1}{2g}\left[G_1\left(i_A^2+r_1^2\right)\left(\frac{1}{R_1-r_1}\right)^2+\frac{1}{2}G_2+G_3\right]r_2^2\left(2\dot{\varphi}_2\right)$$

$$26)\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{1}{g}\left[G_1\left(i_A^2+r_1^2\right)\left(\frac{1}{R_1-r_1}\right)^2+\frac{1}{2}G_2+G_3\right]r_2^2\,\ddot{\varphi}_2$$

$$27)\quad \frac{\partial E}{\partial q} = 0$$

Uwaga: W równaniu (25) różniczkujemy E względem prędkości uogólnionej. Energia kinetyczna to iloczyn stałej ze względu na prędkość uogólnioną i prędkości uogólnionej podniesionej do kwadratu. Stałą przenosimy przed znak różniczkowania i wyznaczamy pochodną z funkcji kwadratowej prędkości uogólnionej. W równaniu (26) różniczkujemy względem czasu równanie (25), więc wartość wektora prędkości uogólnionej zamienia się w wartość wektora przyspieszenia uogólnionego. Równanie (27) wynika z faktu, że energia kinetyczna E nie jest funkcją q (współrzędnej uogólnionej, czyli φ_2). W pewnych przypadkach może się zdarzyć, że E będzie funkcją q, wtedy człon z równania (27) będzie niezerowy.

j) Podstawiamy do ogólnej formy równania Lagrange'a, otrzymujemy dynamiczne równanie ruchu w formie:

$$28)\quad \frac{1}{g}\left[G_1\left(i_A^2+r_1^2\right)\left(\frac{1}{R_1-r_1}\right)^2+\frac{1}{2}G_2+G_3\right]r_2^2\,\ddot{\varphi}_2 =$$
$$= G_3 r_2\left(\sin\alpha-\mu\cos\alpha\right)-P\frac{r_1 r_2}{R_1-r_1}\cos\beta-\left(P\sin\beta+G_1\right)f\frac{r_2}{R_1-r_1}$$

k) Wyznaczamy wartość wektora przyspieszenia kątowego krążka 1 w formie:

$$29)\quad \ddot{\varphi}_2 = \frac{g\left[G_3 \cancel{r_2}\left(\sin\alpha-\mu\cos\alpha\right)-P\frac{r_1 \cancel{r_2}}{R_1-r_1}\cos\beta-\left(P\sin\beta+G_1\right)f\frac{\cancel{r_2}}{R_1-r_1}\right]}{\left[G_1\left(i_A^2+r_1^2\right)\left(\frac{1}{R_1-r_1}\right)^2+\frac{1}{2}G_2+G_3\right]r_2^{\cancel{2}}}\quad\left[\frac{rad}{s^2}\right]$$

Na tym etapie w celu autokorekty warto dokonać sprawdzenia jednostek:

$$\left[\frac{\frac{\cancel{m}}{s^2}\cancel{N}}{\cancel{N}\cdot\cancel{m}} = \frac{rad}{s^2}\right]$$

Dalsza część rozwiązania przebiega jak w zad. 3 z zasady równowagi kinetostatycznej.