5.8. Równania Lagrange'a drugiego rodzaju

Zjawisko ruchu układu można zawsze opisać, stosując tzw. ogólne równanie dynamiki, ale zapiszemy te równania w układzie współrzędnych uogólnionych, mamy wówczas:

$$\left(Q_1 + Q_{1B}\right) \cdot \delta q_1 = \sum_{i=1}^{n} \left(\overline{P}_i - m_i \cdot \overline{a}_i\right) \cdot \left(\delta \overline{r}_i\right)_1 = 0 \tag{31}$$

przy założeniu, że: $\delta q_1 \neq 0$, $\delta q_2 = ... = \delta q_S = 0$. Druga siła uogólniona:

$$\left(Q_2 + Q_{2B}\right) \cdot \delta q_2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\overline{P}_i - m_i \cdot \overline{a}_i\right) \cdot \left(\delta \overline{r}_i\right)_2 = 0 \tag{32}$$

przy założeniu, że: $\delta q_2 \neq 0$, $\delta q_1 = \delta q_3 = ... = \delta q_S = 0$. Postępując tak dla każdej współrzędnej uogólnionej, dojdziemy do ostatniej:

$$\left(Q_S + Q_{SB}\right) \cdot \delta q_S = \sum_{i=1}^{n} \left(\overline{P}_i - m_i \cdot \overline{a}_i\right) \cdot \left(\delta \overline{r}_i\right)_S = 0 \tag{33}$$

gdy: $\delta q_S \neq 0$, $\delta q_1 = ... = \delta q_{S-1} = 0$. Zależności te możemy wyrazić w postaci:

$$\left(Q_j + Q_{jB}\right) \cdot \delta q_j = \sum_{i=1}^{n} \left(\overline{P}_i - m_i \cdot \overline{a}_i\right) \cdot \left(\delta \overline{r}_i\right)_j = 0 \tag{34}$$

W równaniu tym mamy odpowiednio:

- Q_j – j-ta siła uogólniona,
- Q_{jB} – j-ta uogólniona siła bezwładności,
- δq_j – j-te uogólnione przesunięcie wirtualne,
- $\left(\delta \overline{r}_i\right)_j$ – przesunięcie wirtualne i-tego punktu odpowiadające j-temu uogólnionemu przesunięciu wirtualnemu.

Równanie (34) możemy zapisać w prostszej postaci:

$$\left(Q_j + Q_{jB}\right) \cdot \delta q_j = 0 \tag{35}$$

Z równania (34) wiemy, że:

$$Q_{jB} \cdot \delta q_j = -\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \overline{a}_i \cdot \left(\delta \overline{r}_i\right)_j = -\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \frac{d\overline{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_j} \cdot \delta q_j \tag{36}$$

Możemy dalej zapisać, że:

$$\frac{d\overline{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\overline{v}_i \cdot \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_j} \right) - \overline{v}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_j} \right) \tag{37}$$

Wówczas:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{d\overline{r}_i}{dt} = \frac{\partial \overline{v}_i}{\partial q_j} \tag{38}$$

Z wyrażenia na prędkość i-tego punktu wywnioskujemy, że pochodna cząstkowa $\overline{r}_i$ względem współrzędnej uogólnionej qj jest równa:

$$\frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\overline{v}_i}{\dot{q}_j} = \frac{\partial \overline{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \tag{39}$$

Podstawiając do wyrażenia (37) powyższe wielkości, dostaniemy:

$$\frac{d\overline{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \overline{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\overline{v}_i \cdot \frac{\partial \overline{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \overline{v}_i \frac{\partial \overline{v}_i}{\partial q_j} \tag{40}$$

Wykorzystując wzory na pochodną funkcji, zapiszemy:

$$\frac{d}{dt}\left(\overline{v}_i \cdot \frac{\partial \overline{v}_i}{\partial \dot{q}_j}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \overline{v}_i^2}{\partial \dot{q}_j}\right) \tag{41}$$

$$\overline{v}_i \frac{\partial \overline{v}_i}{\partial q_j} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \overline{v}_i^2}{\partial q_j} \tag{42}$$

Uogólniona siła bezwładności będzie równa:

$$Q_{jB} = -\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot \frac{\partial \overline{v}_i^2}{\partial \dot{q}_j}\right) + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot \frac{\partial \overline{v}_i^2}{\partial q_j} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j}\right) + \frac{\partial E}{\partial q_j} \tag{43}$$

gdzie E - energia kinetyczna układu. Wielkość tę wstawimy do równania (35) i dostajemy:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial E}{\partial q_j} = Q_j \tag{44}$$

Jest to tzw. równanie Lagrange'a drugiego rodzaju. Równanie (44) stosujemy do opisu zjawiska ruchu układu. Energia kinetyczna układu jest funkcją współrzędnych uogólnionych i prędkości uogólnionych:

$$E = E\left(q_1, ..., q_S, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_S\right) \tag{45}$$

Q_j - siła uogólniona odpowiadająca j-tej współrzędnej uogólnionej.

5.9. Inna wersja równań Lagrange'a drugiego rodzaju

Jeżeli pracę w układzie wykonują tylko siły pola potencjalnego, to wówczas:

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \tag{46}$$

czyli równanie Lagrange'a zapiszemy:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial E}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0 \tag{47}$$

Wprowadzamy pojęcie tzw. funkcji Lagrange'a:

$$L = E - V \tag{48}$$

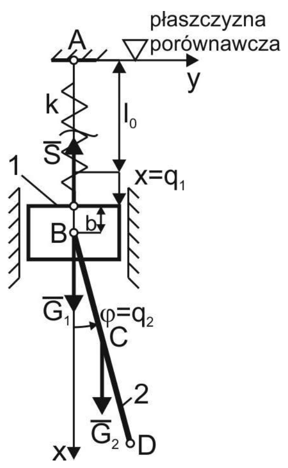
Równanie (48) to tzw. potencjał kinetyczny. Zastosujemy wprowadzone pojęcia. Wówczas równania Lagrange'a zapiszemy w postaci:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0 \qquad j=1,\ldots,s \tag{49}$$

Równania (49) opisują zjawisko ruchu układu.

Przykład 12

Dla układu płaskiego pokazanego na rysunku ułóż dynamiczne równania ruchu stosując równania Lagrange'a drugiego rodzaju w wersji określonej wzorem (49). Znane są: długość początkowa nienapiętej sprężyny l_0 [m], współczynnik sprężystości sprężyny k [N/m], odległości b [m] i BD = h [m], i ciężary brył $\overline{G}_1$ [N] i $\overline{G}_2$ [N]. Dla uproszczenia należy przyjąć, że masa pręta 2 jest skupiona w punkcie C.



Dany układ rozważano już w przykładzie 11. Jak poprzednio przyjmujemy dwie współrzędne uogólnione: $q_1 = x$, $q_2 = \varphi$. Potencjał układu to:

$$\begin{aligned} V &= -m_1 \cdot g \cdot (l_0 + x) - m_2 \cdot g \cdot \left(l_0 + x + b + \frac{h}{2} \cdot \cos\varphi \right) + \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = \\ &= -m_1 \cdot g \cdot (l_0 + q_1) - m_2 \cdot g \cdot \left(l_0 + q_1 + b + \frac{h}{2} \cdot \cos q_2 \right) + \frac{1}{2} \cdot k \cdot q_1^2 = V(q_1, q_2) \end{aligned} \qquad \text{(p12.1)}$$

gdzie $m_1g = G_1$, $m_2g = G_2$ to ciężary brył. Energia kinetyczna układu to suma energii kinetycznych poszczególnych brył, czyli:

$$E = E_1 + E_2 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_B^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_C^2 \qquad \text{(p12.2)}$$

gdzie prędkość punktu B $v_B = \dot{x}$, natomiast prędkość punktu C to:

$$v_C = \sqrt{v_{Cx}^2 + v_{Cy}^2} = \sqrt{\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2} \qquad \text{(p12.3)}$$

Współrzędne punktu C to:

$$\begin{cases} x_C = x + b + \dfrac{h}{2} \cdot \cos\varphi \\ y_C = \dfrac{h}{2} \cdot \sin\varphi \end{cases} \qquad \text{(p12.4)}$$

Po zróżniczkowaniu współrzędnych otrzymamy:

$$\begin{cases} \dot{x}_C = \dot{x} - \dot{\varphi} \cdot \frac{h}{2} \cdot \sin\varphi \\ \dot{y}_C = \dot{\varphi} \cdot \frac{h}{2} \cdot \cos\varphi \end{cases} \tag{p12.5}$$

Ostatecznie energia kinetyczna układu określona jest wzorem:

$$E = E_1 + E_2 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \left[\left(\dot{x} - \dot{\varphi} \cdot \frac{h}{2} \cdot \sin\varphi \right)^2 + \left(\dot{\varphi} \cdot \frac{h}{2} \cdot \cos\varphi \right)^2 \right] =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \left(m_1 + m_2 \right) \cdot \dot{x}^2 - \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot h \cdot \dot{x} \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin\varphi + \frac{1}{8} \cdot m_2 \cdot h^2 \cdot \dot{\varphi}^2 =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \left(m_1 + m_2 \right) \cdot \dot{q}_1^2 - \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot h \cdot \dot{q}_1 \cdot \dot{q}_2 \cdot \sin q_2 + \frac{1}{8} \cdot m_2 \cdot h^2 \cdot \dot{q}_2^2 = E\left(q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2 \right) \tag{p12.6}$$

W rozważanym przypadku funkcja Lagrange'a to:

$$
\begin{aligned}
L = E - V = \frac{1}{2}\cdot\left(m_1 + m_2\right)\cdot\dot{q}_1^2 - \frac{1}{2}\cdot m_2\cdot h\cdot\dot{q}_1\cdot\dot{q}_2\cdot\sin q_2 + \frac{1}{8}\cdot m_2\cdot h^2\cdot\dot{q}_2^2 + \\
+ m_1\cdot g\cdot\left(l_0 + q_1\right) + m_2\cdot g\cdot\left(l_0 + q_1 + b + \frac{h}{2}\cdot\cos q_2\right) - \frac{1}{2}\cdot k\cdot q_1^2
\end{aligned}
\tag{p12.7}
$$

W rozważanym przypadku równania Lagrange'a drugiego rodzaju (49) opisujące ruch układu to

$$
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \qquad j = 1, 2 \tag{p12.8}
$$

Elementy lewej strony równań Lagrange'a drugiego rodzaju to:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial q_1} = \left(m_1 + m_2\right) \cdot g - k \cdot q_1, \\
&\frac{\partial L}{\partial q_2} = -\frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot h \cdot \left(\dot{q}_1 \cdot \dot{q}_2 \cdot \cos q_2 + g \cdot \sin q_2\right) \\
&\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \left(m_1 + m_2\right) \cdot \dot{q}_1 - \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot h \cdot \dot{q}_2 \cdot \sin q_2 \\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) = \left(m_1 + m_2\right) \cdot \ddot{q}_1 - \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot h \cdot \left(\ddot{q}_2 \cdot \sin q_2 + \dot{q}_2^2 \cdot \cos q_2\right) \\
&\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = -\frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot h \cdot \dot{q}_1 \cdot \sin q_2 + \frac{1}{4} \cdot m_2 \cdot h^2 \cdot \dot{q}_2 \\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot h \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot h \cdot \ddot{q}_2 - \left(\ddot{q}_1 \cdot \sin q_2 + \dot{q}_1 \cdot \dot{q}_2 \cdot \cos q_2\right)\right]
\end{aligned}
\tag{p12.9}
$$

Ostatecznie równania ruchu to:

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)\cdot\ddot{q}_1 - \frac{1}{2}\cdot m_2\cdot h\cdot\left(\ddot{q}_2\cdot\sin q_2 + \dot{q}_2^2\cdot\cos q_2\right) - (m_1 + m_2)\cdot g + k\cdot q_1 = 0 \\ \frac{1}{2}\cdot m_2\cdot h\cdot\left[\frac{1}{2}\cdot h\cdot\ddot{q}_2 - \left(\ddot{q}_1\cdot\sin q_2 + \dot{q}_1\cdot\dot{q}_2\cdot\cos q_2\right)\right] + \frac{1}{2}\cdot m_2\cdot h\cdot\left(\dot{q}_1\cdot\dot{q}_2\cdot\cos q_2 + g\cdot\sin q_2\right) = 0 \end{cases}$$

(p12.10)