5.5. Równowaga układu

Dany jest układ brył, na który działają siły zewnętrzne. Praca uogólniona tych sił jest równa:

$$\delta L = \delta L_1 + \delta L_2 + \ldots + \delta L_S \tag{24}$$

W podanym wzorze elementów składowych sumy jest tyle, ile układ posiada stopni swobody, czyli s. Aby możliwa była równowaga statyczna układu, spełnione musi być równanie:

$$\delta L = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \ldots + Q_3 \delta q_3 = 0 \tag{25}$$

Z równania (25) wynikają warunki, jakie muszą być spełnione, aby równowaga statyczna była możliwa, a mianowicie:

$$\left.\begin{array}{l} Q_1 = 0 \\ Q_2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Q_S = 0 \end{array}\right\} \tag{26}$$

Zatem wszystkie siły uogólnione układu muszą się zerować.

5.6. Pole potencjalne

Jeżeli w naszym układzie pracę wykonują tylko siły pola potencjalnego, to wówczas zapiszemy, że potencjał jest funkcją współrzędnych uogólnionych, czyli:

$$V = V\left(q_1, q_2, ..., q_S\right) \tag{27}$$

Określając pochodne cząstkowe potencjału V, opierając się na współrzędnych uogólnionych, dostaniemy:

$$\left.\begin{array}{l} Q_1 = -\dfrac{\partial V}{\partial q_1} \\ Q_2 = -\dfrac{\partial V}{\partial q_2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Q_S = -\dfrac{\partial V}{\partial q_S} \end{array}\right\} \tag{28}$$

Z równania tego wynika, że uogólnione cząstkowe pochodne względem odpowiednich współrzędnych uogólnionych określają siłę uogólnioną.

5.7. Równowaga statyczna w polu potencjalnym

Załóżmy, że dany jest układ brył, na który działają siły pola potencjalnego. Potencjał jest funkcją współrzędnych uogólnionych:

$$V = V\left(q_1, q_2, \ldots, q_S\right)$$

Równowaga statyczna wystąpi wówczas, gdy potencjał osiągnie minimalną wartość dla określonych współrzędnych uogólnionych, czyli:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\dfrac{\partial V}{\partial q_1}\right|_{q_1=q_{01}} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left.\dfrac{\partial V}{\partial q_S}\right|_{q_S=q_{0S}} = 0 \end{array}\right\} \tag{29}$$

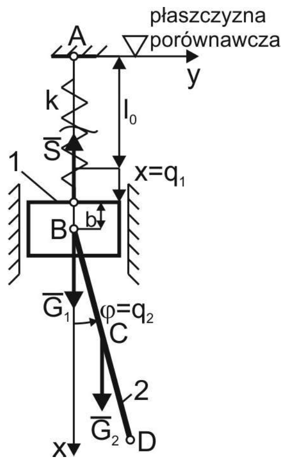
Następnie sprawdzamy, czy jest to położenie równowagi trwałej:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\dfrac{\partial^2 V}{\partial q_1^2}\right|_{q_1=q_{01}} > 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \left.\dfrac{\partial^2 V}{\partial q_S^2}\right|_{q_S=q_{0S}} > 0 \end{array}\right\} \tag{30}$$

Jeżeli dla określonych współrzędnych uogólnionych spełnione są zależności (29) i (30), to mówimy, że jest to położenie minimum potencjału lub inaczej położenie równowagi statycznej układu.

Przykład 11

Dla układu płaskiego pokazanego na rysunku określić siły uogólnione i położenie równowagi statycznej. Znane są: długość początkowa nienapiętej sprężyny l_0 [m], współczynnik sprężystości sprężyny k [N/m], odległości b [m] i BD = h [m], i ciężary brył $\overline{G}_1$ [N] i $\overline{G}_2$ [N].



Wodzik 1 może przesuwać się w prowadnicy wzdłuż osi x, wahadło 2 może obracać się wokół ruchomego punktu B. Omawiany układ ma dwa stopnie swobody, przyjmujemy więc dwie współrzędne uogólnione:

- pierwsza współrzędna uogólniona to przemieszczenie wodzika 1: $q_1 = x$,
- druga współrzędna uogólniona to kąt obrotu wahadła 2: $q_2 = \varphi$.

Potencjał układu jest równy sumie potencjału grawitacyjnego i sprężystego, czyli:

$$V = -m_1 \cdot g \cdot \left(l_0 + x\right) - m_2 \cdot g \cdot \left(l_0 + x + b + \frac{h}{2} \cdot \cos\varphi\right) + \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = V\left(q_1, q_2\right) \quad \text{(p11.1)}$$

gdzie $m_1g = G_1$, $m_2g = G_2$ to ciężary brył. Zgodnie z równaniami (28) siły uogólnione wynoszą:

$$\begin{aligned} Q_1 &= -\frac{\partial V}{\partial x} = -\left(-m_1 \cdot g - m_2 \cdot g + k \cdot x\right) = m_1 \cdot g + m_2 \cdot g - k \cdot x \\ Q_2 &= -\frac{\partial V}{\partial \varphi} = -\left(m_2 \cdot g \cdot \frac{h}{2} \cdot \sin\varphi\right) = -m_2 \cdot g \cdot \frac{h}{2} \cdot \sin\varphi \end{aligned} \quad \text{(p11.2)}$$

Równowaga statyczna wystąpi wówczas, gdy spełnione są równania (29), czyli:

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x=\lambda_S} &= -m_1 \cdot g - m_2 \cdot g + k \cdot \lambda_S = 0 \\ \left.\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\varphi_0} &= m_2 \cdot g \cdot \frac{h}{2} \cdot \sin\varphi_0 = 0 \end{aligned} \quad \text{(p11.3)}$$

gdzie: λ_S – deformacja statyczna sprężyny (odkształcenie sprężyny w położeniu równowagi),
φ_0 – kąt przy którym wystąpi równowaga statyczna.

Z równań (p11.3) wynika, że deformacja statyczna sprężyny wynosi

$$\lambda_S = \frac{G_1 + G_2}{k} \tag{p11.4}$$

natomiast kąt obrotu wahadła, przy którym występuje równowaga statyczna spełnia zależność

$$\sin\varphi_0 = 0 \tag{p11.5}$$

Z równania (p11.5) wynika, że $\varphi_0 = 0, \pi, 2\pi, \ldots$. Aby ustalić, które rozwiązanie jest prawdziwe, zastosujemy twierdzenie mówiące, że położenie równowagi w polu potencjalnym jest tam gdzie potencjał osiąga minimum (równania 30), czyli:

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{x=\lambda_S} &= k > 0 \\ \left.\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}\right|_{\varphi=\varphi_0} &= m_2 \cdot g \cdot \frac{h}{2} \cdot \cos\varphi_0 > 0 \end{aligned} \tag{p11.6}$$

Z pierwszego równania układu (p11.6) wynika, że istotnie przy deformacji sprężyny o λ_S występuje stan równowagi statycznej (trwałej) wodzika, zaś z drugiego równania wynika, że równowaga statyczna wahadła występuje dla $\varphi_0 = 2k\pi$, gdzie $k = 0, 1, 2, \ldots$, czyli np. $\varphi_0 = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$.