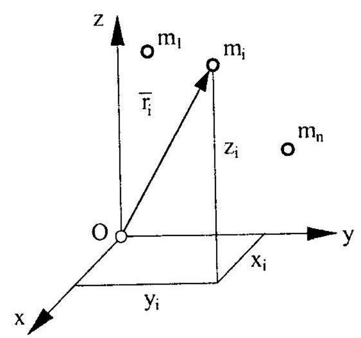
5. Równania Lagrange'a

5.1. Więzy i ich równania

Niech będzie dany zbiór punktów materialnych zwany układem punktów materialnych (rys. 1).



Rys. 1

$(m_1,\ldots,m_n)$ – układ punktów materialnych

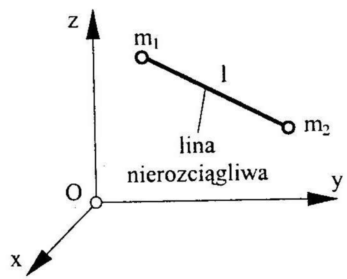
$\bar{r}_i = \bar{r}_i(x_i, y_i, z_i)$ - wektor promień opisujący położenie i-tego punktu materialnego

Jeżeli na układ punktów nie narzucono żadnych ograniczeń, to taki układ nazywamy swobodnym. W praktyce inżynierskiej spotykamy się z zagadnieniami, w których ruch układu punktów materialnych podlega pewnym ograniczeniom, na przykład takim, że określone punkty układu muszą stale pozostawać na pewnej powierzchni, krzywej itd. Układ punktów materialnych jest wówczas układem nieswobodnym. Ograniczenia te nazywamy więzami. Można je zapisać w postaci analitycznej i dostajemy wówczas tzw. równanie więzów. Na układ narzucono przykładowo następujące więzy:

$$\left.\begin{array}{l} F_1\left(x_1\ y_1\ z_1,\ x_2\ y_2\ z_2,\ \ldots,\ x_n\ y_n\ z_n\right)=0 \\ F_2\left(x_1\ y_1\ z_1,\ x_2\ y_2\ z_2,\ \ldots,\ x_n\ y_n\ z_n\right)=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n\left(x_1\ y_1\ z_1,\ x_2\ y_2\ z_2,\ \ldots,\ x_n\ y_n\ z_n\right)=0 \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Zależność (1) to równania więzów narzuconych na układ punktów materialnych. Są to najczęściej więzy występujące w układach technicznych, nazywane więzami geometrycznymi (holonomicznymi), dwustronnymi, czyli takie więzy, które narzucają ograniczenia na współrzędne. Nie zależą one w sposób jawny od czasu, są stacjonarne albo skleronomiczne.

Rozważmy przykład dwóch punktów materialnych połączonych liną (rys. 2).



Rys. 2

Lina łącząca punkty jest zawsze napięta, więc:

$$l^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 \tag{2}$$

To równanie jest równaniem więzów narzuconych na układ dwóch punktów materialnych (lina jest tu wiązem). Równanie więzów zapiszemy w postaci:

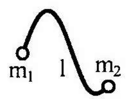
$$F_1(x_1\ y_1\ z_1,\ x_2\ y_2\ z_2) = 0 \tag{3}$$

czyli

$$F_1 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - l^2 = 0 \tag{4}$$

Na układ punktów materialnych m_1, m_2 narzucone są więzy geometryczne obustronne niezależne od czasu.

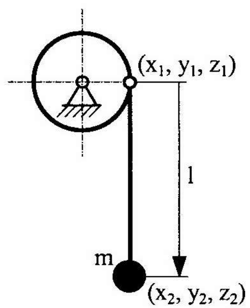
Można też na punkty połączone liną narzucić więzy jednostronne (rys. 3), np.:



Rys. 3

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 \leq l^2 \qquad (5)$$

Jeżeli np. napięta lina zmienia swoją długość, to wówczas $l = l(t)$, gdzie t - czas. Na przykład z krążka jest odwijana lina (rys. 4), na której końcu zawieszona jest masa m.



Rys. 4

Współrzędne (x_1 y_1 z_1) opisują położenie ostatniego punktu, w którym lina styka się z krążkiem. Współrzędne (x_2 y_2 z_2) określają położenie masy m. Jeśli masa przemieszcza się ze stałą prędkością λ [m/s], to przebywa drogę λt [m] Odległość pomiędzy punktami zapiszemy:

$$\left(x_1 - x_2\right)^2 + \left(y_1 - y_2\right)^2 + \left(z_1 - z_2\right)^2 = l^2 = \lambda^2 \cdot t^2 \qquad (6)$$

Równanie więzów narzuconych na układ:

$$F_1 = \left(x_1 - x_2\right)^2 + \left(y_1 - y_2\right)^2 + \left(z_1 - z_2\right)^2 - \lambda^2 \cdot t^2 = 0 \qquad (7)$$

Jeżeli w równaniach więzów występuje czas w postaci jawnej, to więzy są niestacjonarne (reonomiczne). Równanie tych więzów możemy zapisać:

$$F_1\left(x_1\ y_1\ z_1,\ ...,\ x_n\ y_n\ z_n,\ t\right) = 0 \qquad (8)$$

W układach możemy spotkać się również z takimi więzami, które nakładają ograniczenia nie tylko na współrzędne punktów, lecz również na prędkości punktów, co zapiszemy w postaci:

$$F_1\left(x_1\ y_1\ z_1,\ ...,\ x_n\ y_n\ z_n,\ \dot{x}_1\ \dot{y}_1\ \dot{z}_1,\ ...,\ \dot{x}_n\ \dot{y}_n\ \dot{z}_n\right) = 0 \qquad (9)$$

Takie więzy nazywamy więzami kinematycznymi.

Z podanych informacji wynika, że opisują ruch układu punktów nieswobodnych. Dowolnie przyjąć można tylko pewną ilość współrzędnych niezależnych. Ta ilość współrzędnych to tzw. liczba stopni swobody układu punktów materialnych, czyli:

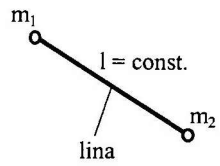
$$s = 3 \cdot n - p \tag{10}$$

gdzie: s - liczba stopni swobody układu,
n - ilość punktów materialnych,
$3 \cdot n$ - ilość współrzędnych opisujących położenie układu punktów materialnych,
p - ilość równań więzów.

Równanie (10) określa liczbę stopni swobody układu.

Przykład 5

Dwa punkty materialne: m_1 i m_2 połączone są nierozciągliwą liną, której długość jest stała ($l = const.$) (rysunek). Określić liczbę stopni swobody.



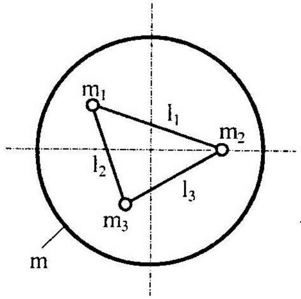
Liczba punktów: $n = 2$, ilość równań więzów opisujących położenie punktów względem siebie: $p = 1$. Liczba stopni swobody:

$$s = 3 \cdot 2 - 1 = 5 \qquad \text{(p5.1)}$$

Układ posiada pięć stopni swobody.

Przykład 6

Rozpatrujemy bryłę sztywną. Obierzmy trzy dowolne punkty m_1 m_2, m_3 należące do bryły, nieleżące na jednej prostej (rysunek). Taki układ trzech punktów modeluje bryłę sztywną.



Ponieważ bryła jest sztywna, to odległości l_1 l_2, l_3 między punktami są stałe. Równania więzów dla bryły:

$$\begin{aligned}
F_1 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - l_1^2 = 0 \\
F_2 &= (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2 - l_2^2 = 0 \\
F_3 &= (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (z_2 - z_3)^2 - l_3^2 = 0
\end{aligned} \qquad \text{(p6.1)}$$

Mamy trzy punkty należące do bryły, trzy równania więzów, liczba stopni swobody bryły wyniesie:

$$s = 3 \cdot 3 - 3 = 6 \qquad \text{(p6.2)}$$

Uwaga!

Stopnie swobody to liczba niezależnych współrzędnych, które w sposób jednoznaczny opisują położenie układu. Każda z tych współrzędnych określa niezależny ruch.

5.2. Współrzędne uogólnione

Położenie układów punktów materialnych lub ciał sztywnych będzie jednoznacznie określone, jeżeli podamy współrzędne kartezjańskie wszystkich punktów tworzących układ. Na układ narzucamy więzy ograniczające ruch, czyli narzucamy ograniczenia na odpowiednie współrzędne. Wygodnie jest opisywać położenie układu za pomocą parametrów, które są już między sobą niezależne. Mogą to być wielkości zupełnie dowolne. Takie wielkości niezależne, wybrane w celu opisania położenia układu punktów lub ciał sztywnych, nazywamy współrzędnymi uogólnionymi.