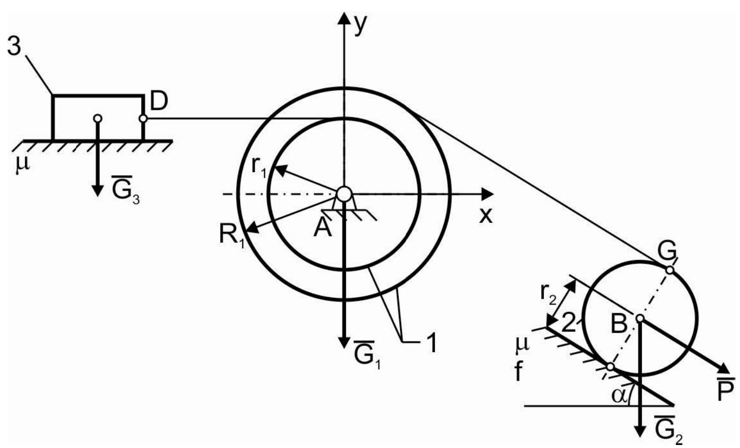
Przykład 4

Dla układu mechanicznego jak w poprzednim przykładzie, wyznaczyć kinematyczne parametry ruchu krążka 1 stosując ogólne równanie dynamiki. Znane są promienie krążków r_1 [m], R_1 [m], r_2 [m], promień bezwładności krążka 1 $i_A^{(1)} = r_1$ [m], współczynnik tarcia suchego μ, współczynnik tarcia toczenia f [m], kąt pochylenia równi α [rad], wartość siły P [N] oraz ciężary członów G_1 [N], G_2 [N], G_3 [N].



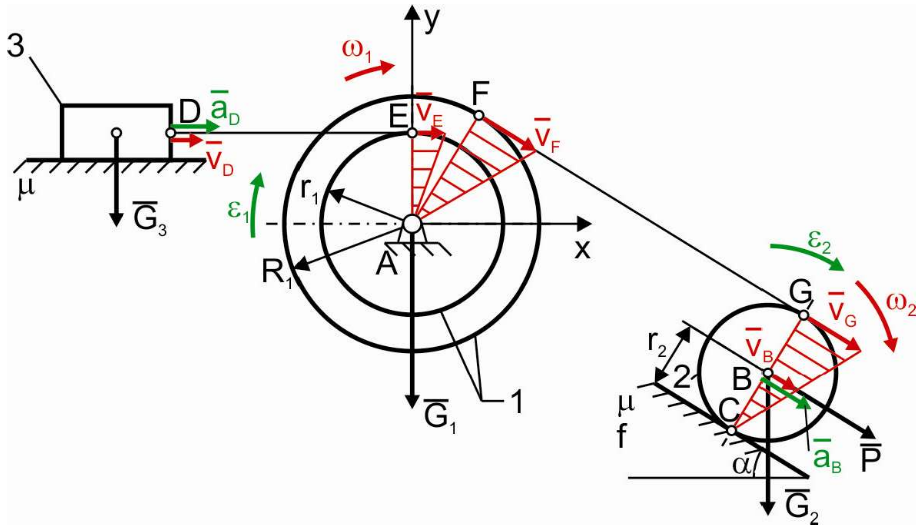
Kinematyka układu.

1 – bryła w ruchu obrotowym,

2 – bryła w ruchu płaskim,

3 – bryła w ruchu postępowym.

Nie znamy prędkości żadnej bryły ani żadnego punktu układu. Ale załóżmy np. prędkość kątową krążka 1.



Z rozkładu prędkości układu wynika, że wszystkie charakterystyczne prędkości poszczególnych punktów i brył w układzie można wyrazić w funkcji prędkości ω_1 następująco:

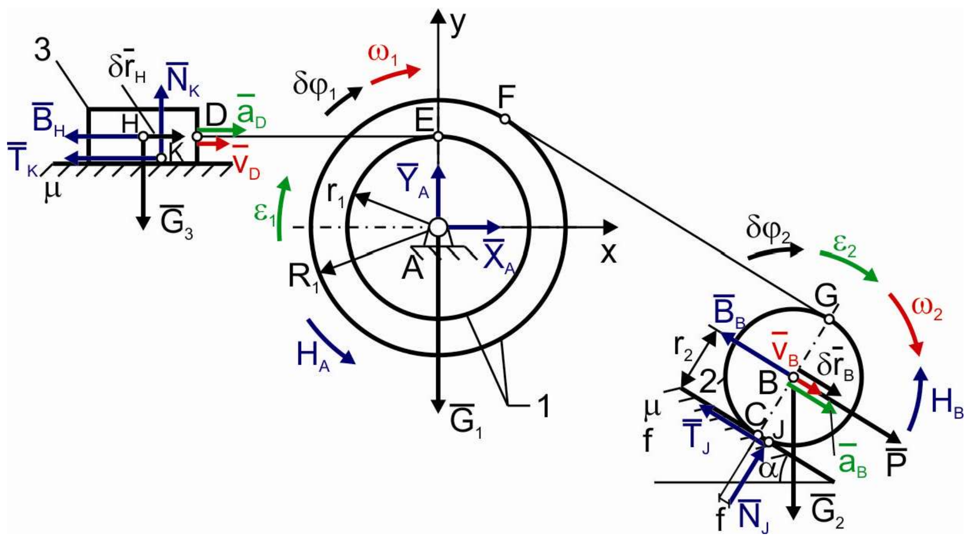
$$
\begin{aligned}
v_D &= v_E = r_1 \cdot \omega_1 \\
v_G &= v_F = R_1 \cdot \omega_1 \\
v_G &= 2 \cdot r_2 \cdot \omega_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{R_1}{2 \cdot r_2} \cdot \omega_1 \\
v_B &= \frac{1}{2} \cdot R_1 \cdot \omega_1
\end{aligned}
\tag{p4.1}
$$

Z kolei przyspieszenia poszczególnych punktów i brył to

$$
\begin{aligned}
a_D &= r_1 \cdot \varepsilon_1 \\
\varepsilon_2 &= \frac{R_1}{2 \cdot r_2} \cdot \varepsilon_1 \\
a_B &= \frac{1}{2} \cdot R_1 \cdot \varepsilon_1
\end{aligned}
\tag{p4.2}
$$

gdzie $\varepsilon_1 = \dot{\omega}_1$ to przyspieszenie kątowe krążka 1.

W celu opisania dynamiki układu przy pomocy ogólnego równania dynamiki, oblicza się pracę przygotowaną wszystkich sił prawdziwych i bezwładności działających na układ. W tym celu najpierw wprowadza się przemieszczenia przygotowane, następnie wszystkie siły prawdziwe oraz siły fikcyjne (tzw. siły bezwładności) i twierdzi się, że są one w równowadze. Pomija się siły wewnętrzne o ile nie wykonują pracy. Wprowadzone siły pokazano na poniższym rysunku.



Przemieszczenia przygotowane określone są następująco:

$$\delta r_H = \delta r_D = r_1 \cdot \delta\varphi_1$$

$$\delta\varphi_2 = \frac{R_1}{2 \cdot r_2} \cdot \delta\varphi_1 \qquad \text{(p4.3)}$$

$$\delta r_B = \frac{1}{2} \cdot R_1 \cdot \delta\varphi_1$$

Wprowadzone siły to:

a) siły prawdziwe:

$\overline{X}_A, \overline{Y}_A$ - siły reakcji podpory w punkcie A,

$\overline{T}_J, \overline{N}_J$ - siły reakcji równi w punkcie J,

$\overline{T}_K, \overline{N}_K$ - siły reakcji równi w punkcie K,

b) siły fikcyjne

$$\overline{B}_A = -m_1 \cdot \overline{a}_A = 0 \tag{p4.4}$$

$$\overline{H}_A = -I_A \cdot \overline{\varepsilon}_1$$
$$H_A = I_A \cdot \varepsilon_1 = \frac{G_1}{g} \cdot \left(i_A^{(1)}\right)^2 \cdot \varepsilon_1 \tag{p4.5}$$

$$\overline{B}_B = -m_2 \cdot \overline{a}_B$$
$$B_B = m_2 \cdot a_B = \frac{1}{2} \cdot \frac{G_2}{g} \cdot R_1 \cdot \varepsilon_1 \tag{p4.6}$$

$$\overline{H}_B = -I_B \cdot \overline{\varepsilon}_2$$
$$H_B = I_B \cdot \varepsilon_2 = \frac{G_2}{2 \cdot g} \cdot r_2^2 \cdot \frac{R_1}{2 \cdot r_2} \cdot \varepsilon_1 = \frac{G_2}{4 \cdot g} \cdot r_2 \cdot R_1 \cdot \varepsilon_1 \tag{p4.7}$$

$$\overline{B}_H = -m_3 \cdot \overline{a}_H$$
$$B_H = m_3 \cdot a_H = \frac{G_3}{g} \cdot r_1 \cdot \varepsilon_1 \tag{p4.8}$$

Praca przygotowana to:

$$\begin{aligned}\delta L = &-H_A \cdot \delta\varphi_1 + \left(P + G_2 \cdot \sin\alpha - T_J - B_B\right) \cdot \delta r_B + \\ &+ \left(T_J \cdot r_2 - N_J \cdot f - H_B\right) \cdot \delta\varphi_2 - \left(T_K + B_H\right) \cdot \delta r_H = 0\end{aligned} \tag{p4.9}$$

Po uwzględnieniu wyprowadzonych zależności będzie

$$\begin{aligned}\delta L = &\left[\left(-G_1 \cdot \left(i_A^{(1)}\right)^2 - \frac{3}{8} \cdot G_2 \cdot R_1^2 - G_3 \cdot r_1^2\right) \cdot \frac{\varepsilon_1}{g} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} \cdot P \cdot R_1 + \frac{1}{2} \cdot G_2 \cdot \left(\sin\alpha - \cos\alpha \cdot \frac{f}{r_2}\right) \cdot R_1 - \mu \cdot G_3 \cdot r_1\right] \cdot \delta\varphi_1 = 0\end{aligned} \tag{p4.10}$$

Ponieważ zakładamy, że $\delta\varphi_1 \neq 0$, to wyrażenie w nawiasie [.]=0, a stąd

$$\varepsilon_1 = \frac{\frac{1}{2} \cdot P \cdot R_1 + \frac{1}{2} \cdot G_2 \cdot \left(\sin\alpha - \cos\alpha \cdot \frac{f}{r_2}\right) \cdot R_1 - \mu \cdot G_3 \cdot r_1}{G_1 \cdot \left(i_A^{(1)}\right)^2 + \frac{3}{8} \cdot G_2 \cdot R_1^2 + G_3 \cdot r_1^2} \cdot g = \varepsilon = \text{const} \tag{p4.11}$$

Całkując dwukrotnie powyższe równanie z zerowymi warunkami początkowymi otrzymano prędkość kątową i kąt obrotu krążka 1

$$\omega_1 = \int_0^t \varepsilon_1 \cdot dt = \varepsilon \cdot t \qquad \text{(p3.12)}$$

$$\varphi_1 = \int_0^t \omega_1 \cdot dt = \frac{1}{2}\varepsilon \cdot t^2 \qquad \text{(p3.13)}$$