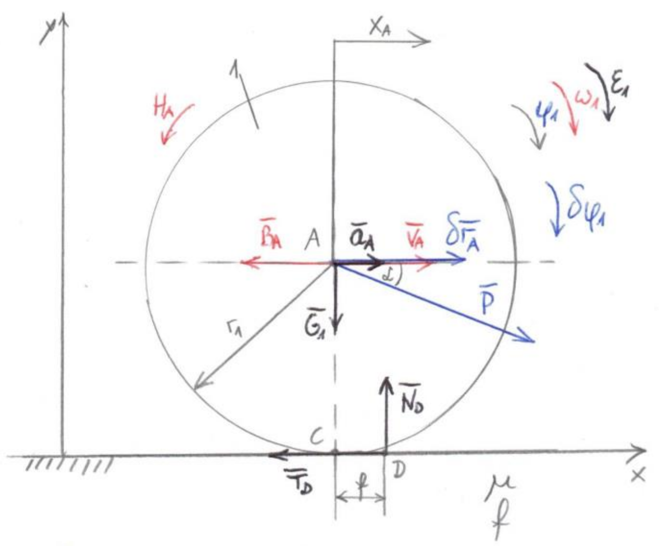
Ogólne równanie dynamiki

Zad. 1.

Krążek 1 o znanym ciężarze i promieniu r_1 toczy się w prawo po płaskiej powierzchni pod wpływem siły P o kierunku jak pokazano na rysunku. Występuje zjawisko tarcia suchego oraz tarcia toczenia. Wyznacz kątowe parametry ruchu krążka 1 stosując ogólne równanie dynamiki.



Dane:

G_1, P [N]

r_1, f [m]

μ [-]

α [rad]

Szukane:

φ_1 = ?

Szukamy kątowych parametrów ruchu bryły 1.

Rozwiązanie:

a) Krążek toczy się bez poślizgu, jest więc w ruchu płaskim. Przyjmujemy interpretację ruchu płaskiego jako ruchu, w którym występuje przemieszczenie środka masy bryły w prawo (x_A) oraz obrót bryły wokół środka masy (φ_1). Przyjmujemy układ współrzędnych na rysunku w nieruchomym punkcie. Zaznaczamy podstawowe realizowane parametry ruchu, jak przemieszczenie środka masy x_A oraz kąt obrotu krążka φ_1. Wprowadzamy wektory prędkości punktów charakterystycznych oraz wektory prędkości kątowych brył niezbędne do rozwiązania zadania, jak również wektory przyspieszeń. Wprowadzamy wektory przesunięć przygotowanych δr_A oraz $\delta\varphi_1$. Możemy teraz wprowadzić na rysunku wszystkie wektory sił prawdziwych: czynnych (P, G_1) oraz biernych (T_D, N_D), jak również wektor siły fikcyjnej B_A i wektor momentu głównego sił bezwładności H_A.

b) Zapisujemy ogólne równanie dynamiki dla analizowanego przypadku w postaci ogólnej:

$$1)\quad \delta L = (\bar{P}_1 + \bar{B}_A)\,\delta\bar{r}_A + (\bar{M}_A + \bar{H}_A)\,\delta\bar{\varphi}_1 = 0$$

Uwaga: Zapisując zależność (1) zwracamy uwagę na indeksy przy poszczególnych symbolach. Wektor P_1 interpretujemy jako sumę geometryczną wszystkich wektorów sił prawdziwych działających na bryłę 1, wektor momentu M_A interpretujemy jako sumę geometryczną wszystkich wektorów momentu sił prawdziwych działających na bryłę, wyznaczonych względem bieguna A.

c) Podstawiamy do równania (1) rzuty wektorów sił i momentów wynikające z rysunku:

$$2)\quad \delta L = (P\cos\alpha - T_D - B_A)\,\delta r_A + (T_D r_1 - N_D f - H_A)\,\delta\varphi_1 = 0$$

d) Zapisujemy równania więzów siłowych, jeżeli takie wynikają z przyjętego modelu, oraz zapisujemy wartości wielkości niezbędnych do rozwiązania zadania:

$$3)\quad T_D \leq \mu N_D$$

$$4)\quad N_D - P\sin\alpha - G_1 = 0$$

$$5)\quad N_D = G_1 + P\sin\alpha$$

$$6)\quad B_A = m_1 a_A = \frac{G_1}{g}\ddot{x}_A$$

$$7)\quad H_A = J_A \varepsilon_1 = \frac{1}{2}\frac{G_1}{g} r_1^2 \ddot{\varphi}_1$$

e) Zapisujemy równania więzów kinematycznych narzuconych na prędkości:

$$8)\quad v_A = \omega_1 r_1$$

W ogólnym równaniu dynamiki występują wartości wektorów przyspieszeń, więc należy równania więzów kinematycznych narzuconych na prędkości zróżniczkować jednokrotnie względem czasu, otrzymując równania więzów kinematycznych narzuconych na przyspieszenia w następującej formie:

$$9)\quad \ddot{x}_A = \ddot{\varphi}_1 r_1$$

Ponadto zapisujemy równania więzów narzuconych na przesunięcia przygotowane. Należy mieć na uwadze, że wektor przesunięcia przygotowanego interpretujemy jako iloczyn wektora prędkości możliwej i bezwymiarowego współczynnika λ. W analizowanym przypadku otrzymamy więc:

$$10)\quad \delta r_A = \delta\varphi_1 r_1$$

f) Rozwiązanie – z równania (1) otrzymamy:

$$11)\quad \left(P\cos\alpha - T_D - \frac{G_1}{g}\ddot{x}_A\right)\delta\varphi_1 r_1 + \left(T_D r_1 - N_D f - \frac{1}{2}\frac{G_1}{g} r_1^2 \ddot{\varphi}_1\right)\delta\varphi_1 = 0$$

$$12)\quad \left[\left(P\cos\alpha - T_D - \frac{G_1}{g}\ddot{x}_A\right) r_1 + T_D r_1 - N_D f - \frac{1}{2}\frac{G_1}{g} r_1^2 \ddot{\varphi}_1\right]\delta\varphi_1 = 0$$

Należy mieć na uwadze, iż równanie (12) musy być spełnione dla wszystkich wartości $\delta\varphi_1$ również tych różnych od zera :

$$13)\quad \delta\varphi_1 \neq 0$$

Stąd wyrażenie w nawiasie kwadratowym [.]=0:

$$14)\quad P r_1 \cos\alpha - \cancel{T_D r_1} - \frac{G_1}{g} r_1^2 \ddot{\varphi}_1 + \cancel{T_D r_1} - N_D f - \frac{1}{2}\frac{G_1}{g} r_1^2 \ddot{\varphi}_1 = 0$$

$$15)\quad \frac{3}{2}\frac{G_1}{g} r_1^2 \ddot{\varphi}_1 = P r_1 \cos\alpha - (G_1 + P\sin\alpha) f$$

Z zależności (15) wyznaczamy przyspieszenie kątowe krążka 1 w formie:

$$16)\quad \ddot{\varphi}_1 = \frac{2g}{3G_1 r_1^2}\left[P r_1 \cos\alpha - (G_1 + P\sin\alpha) f\right] \quad \left[\frac{rad}{s^2}\right]$$

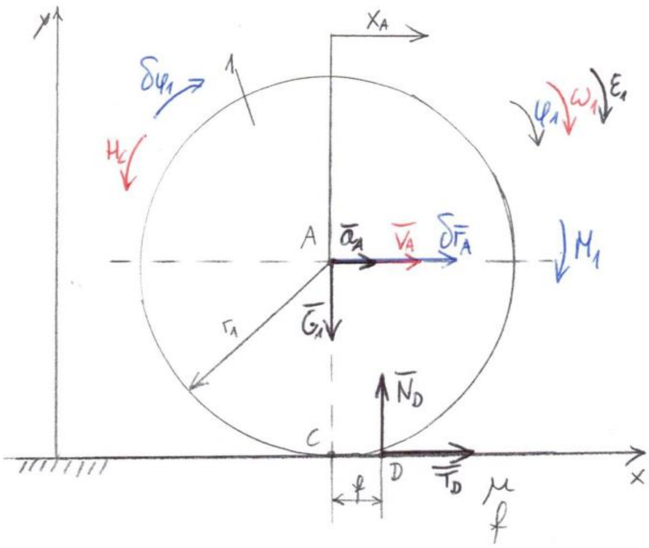
Na tym etapie w celu autokorekty warto dokonać sprawdzenia jednostek:

$$\left[\frac{\frac{\cancel{m}}{s^2}\cdot[N\cdot \cancel{m}]}{N\cdot \cancel{m^2}}\right] = \left[\frac{rad}{s^2}\right]$$

Dalsza część rozwiązania przebiega jak w zad. 1 z zasady równowagi kinetostatycznej.

Zad. 2.

Krążek 1 o znanym ciężarze i promieniu r_1 toczy się w prawo po płaskiej powierzchni pod wpływem momentu (pary sił) M_1. Występuje zjawisko tarcia suchego oraz tarcia toczenia. Wyznacz kątowe parametry ruchu krążka 1 stosując ogólne równanie dynamiki.



Dane:

G_1 [N]

M_1 [Nm]

r_1, f [m]

μ [-]

Szukane:

φ_1 = ?

Szukamy kątowych parametrów ruchu bryły 1.

Rozwiązanie:

a) Krążek toczy się bez poślizgu, jest więc w ruchu płaskim. Przyjmujemy układ współrzędnych na rysunku w nieruchomym punkcie. Zaznaczamy podstawowe realizowane parametry ruchu, jak przemieszczenie środka masy x_A oraz kąt obrotu krążka φ_1. Wprowadzamy wektory prędkości punktów charakterystycznych oraz wektory prędkości kątowych brył niezbędne do rozwiązania zadania, jak również wektory przyspieszeń. Wprowadzamy wektory przesunięć przygotowanych δr_A oraz $\delta\varphi_1$. Możemy teraz wprowadzić na rysunku wszystkie wektory sił prawdziwych: czynnych (G_1) oraz biernych (T_D, N_D), jak również wektor momentu M_1 oraz wektor momentu głównego sił bezwładności H_C względem chwilowego środka obrotu. W rozwiązaniu tego przykładu zastosujemy podejście, w którym ruch płaski krążka potraktujemy jako chwilowy ruch obrotowy wokół chwilowego środka obrotu w punkcie C.

b) Zapisujemy ogólne równanie dynamiki dla analizowanego przypadku w postaci ogólnej:

$$1)\ \delta L = (\bar{M}_C + \bar{H}_C)\,\delta\bar{\varphi}_1 = 0$$

Uwaga: Zapisując zależność (1) zwracamy uwagę na indeksy przy poszczególnych symbolach. Wektor momentu M_C interpretujemy jako sumę geometryczną wszystkich wektorów momentu sił prawdziwych działających na bryłę, wyznaczonych względem bieguna C, czyli chwilowego środka obrotu.

c) Podstawiamy do równania (1) rzuty wektorów momentów wynikające z rysunku:

$$2)\ \delta L = (M_1 - N_D f - H_C)\cdot\delta\varphi_1 = 0$$

d) Zapisujemy równania więzów siłowych, jeżeli takie wynikają z przyjętego modelu, oraz zapisujemy wartości wielkości niezbędnych do rozwiązania zadania:

3) $N_D - G_1 = 0$

4) $N_D = G_1$

5) $T_D \leq \mu N_D$

6) $M_C = J_C \ddot{\varphi}_1$

7) $J_C = J_A + m_1 r_1^2$

8) $J_C = \frac{1}{2} m_1 r_1^2 + m_1 r_1^2 = \frac{3}{2} \frac{G_1}{g} r_1^2$

Uwaga: Zależność (7) to masowy moment bezwładności bryły (krążka) względem chwilowego środka obrotu w punkcie C, wyznaczony z zastosowaniem twierdzenia Steiner'a.

e) Rozwiązanie:

9) $\left(M_1 - G_1 f - \frac{3}{2} \frac{G_1}{g} r_1^2 \ddot{\varphi}_1\right) \delta\varphi_1 = 0$

Należy mieć na uwadze, że równanie (9) musy być spełnione dla wszystkich wartości $\delta\varphi_1$ również tych różnych od zera :

10) $\delta\varphi_1 \neq 0$

Stąd wyrażenie w nawiasie kwadratowym [.]=0:

11) $\frac{3}{2} \frac{G_1}{g} r_1^2 \ddot{\varphi}_1 = M_1 - G_1 f$

Z zależności (11) wyznaczamy przyspieszenie kątowe krążka 1 w formie:

12) $\ddot{\varphi}_1 = \frac{2g}{3 G_1 r_1^2} \left[M_1 - G_1 f\right] \quad \left[\frac{rad}{s^2}\right]$

Na tym etapie w celu autokorekty warto dokonać sprawdzenia jednostek:

$$\left[\frac{\frac{m}{s^2} \cdot [N \cdot m]}{N \cdot m^2} = \frac{rad}{s^2}\right]$$

Dalsza część rozwiązania przebiega jak w zad. 1 z zasady równowagi kinetostatycznej.

Zad. 3.

Pokazany na rysunku układ brył o znanych ciężarach i znanej geometrii pozostaje w ruchu. Krążek 1 o zróżnicowanej średnicy toczy się bez poślizgu po chropowatym podłożu. Występuje zjawisko tarcia suchego i tarcia toczenia. Na krążek 1 działa siła P o znanej wartości, zaczepiona w punkcie A, o kierunku jak pokazano na rysunku. Krążek 2 obraca się w lewo. Bryła 3 przemieszcza się po równi o kącie nachylenia β. Powierzchnie równi i bryły są chropowate. Wyznacz kątowe parametry ruchu bryły 2 stosując ogólne równanie dynamiki.

Dane:

G_1, G_2, G_3, P [N]

R_1, r_1, r_2, f, i_A[m]

μ [-]

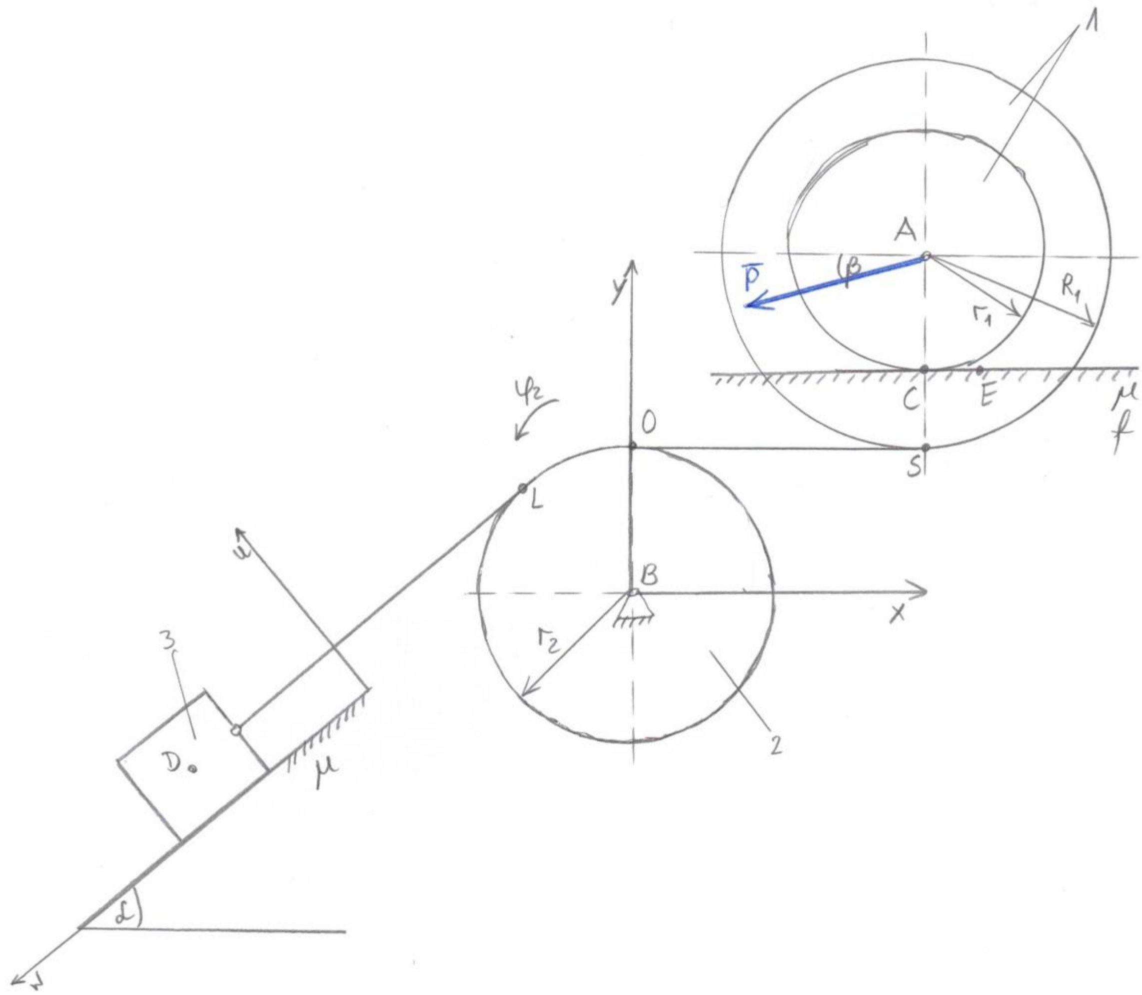
α,β [rad]

zerowe warunki początkowe

Szukane:

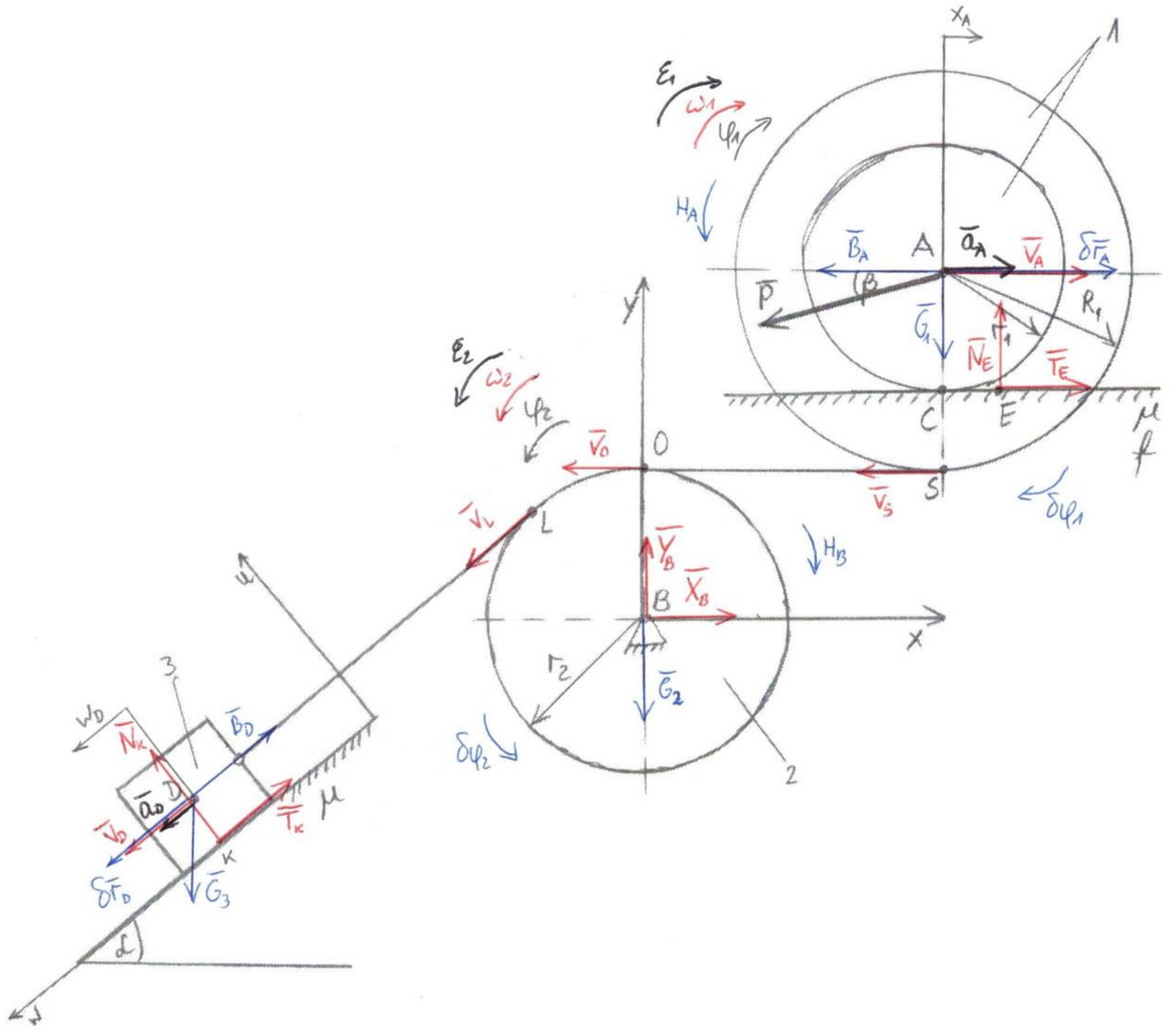
φ_2 = ?

Szukamy kątowych parametrów ruchu bryły 2.



Rozwiązanie:

a) Przyjmujemy układ współrzędnych xy na rysunku w nieruchomym punkcie, np. punkcie B. Przyjmujemy pomocniczy układ współrzędnych uw związany z równią. Krążek 2 obraca się w lewo. Krążek 1 toczy się bez poślizgu, jest więc w ruchu płaskim. Przyjmujemy interpretację ruchu płaskiego jako ruchu, w którym występuje przemieszczenie środka masy bryły w prawo (x_A) oraz obrót bryły wokół środka masy (φ_1). Bryła 3 zsuwa się z równi. Zaznaczamy podstawowe realizowane parametry ruchu, jak przemieszczenie środka masy x_A, kąt obrotu krążka 1 φ_1, kąt obrotu krążka 2 φ_2, oraz realizowane przemieszczenie punktu D, w_D. Wprowadzamy wektory prędkości punktów charakterystycznych oraz wektory prędkości kątowych brył niezbędne do rozwiązania zadania, jak również wektory przyspieszeń. Wprowadzamy wektory przesunięć przygotowanych δr_A, $\delta\varphi_1$, $\delta\varphi_2$, oraz δr_D. Możemy wprowadzić na rysunku wszystkie wektory sił prawdziwych: czynnych (G_1, G_2, G_3, P) oraz biernych (T_E, N_E, T_K, N_K, X_A, Y_A), jak również wektory sił fikcyjnych B_A, B_D i wektory momentu głównego sił bezwładności H_A, H_B. Nie jest konieczne zaznaczanie na rysunku sił wewnętrznych układu sił, jeżeli te nie wykonują pracy przygotowanej.



b) Zapisujemy ogólne równanie dynamiki dla analizowanego przypadku w postaci ogólnej:

$$1)\ \delta L = \sum_{i=1}^{n} \delta L_i = 0$$

$$2)\ \delta L = (\bar{P}_1 + \bar{B}_A)\delta \bar{r}_A + (\bar{M}_A + \bar{H}_A)\delta \bar{\varphi}_1 + (\bar{M}_B + \bar{H}_B)\delta \bar{\varphi}_2 + (\bar{P}_3 + \bar{B}_D)\delta \bar{r}_D = 0$$

Uwaga: Zapisując zależność (2) zwracamy uwagę na indeksy przy poszczególnych symbolach.

c) Podstawiamy do równania (2) rzuty wektorów sił i momentów wynikające z rysunku:

$$3)\ \delta L = (T_E - P\cos\beta - B_A)\delta r_A + (-N_E f - T_E r_1 - H_A)\delta\varphi_1 + (-H_B)\delta\varphi_2 + (G_3 \sin\alpha - T_K - B_D)\delta r_D = 0$$

d) Zapisujemy równania więzów siłowych, jeżeli takie wynikają z przyjętego modelu, oraz zapisujemy wartości wielkości niezbędnych do rozwiązania zadania:

$$4)\ N_E - P\sin\beta - G_1 = 0$$

$$5)\ N_K - G_3 \cos\alpha = 0$$

$$6)\ T_E \leqslant \mu N_E$$

$$7)\ T_K = \mu N_K$$

$$8)\ B_A = m_1 a_A = \frac{G_1}{g}\ddot{x}_A$$

$$9)\ B_D = m_3 a_D = \frac{G_3}{g}\ddot{w}_D$$

$$10)\ H_A = J_A \varepsilon_1 = \frac{G_1}{g} i_A^2 \ddot{\varphi}_1$$

$$11)\ H_B = J_B \varepsilon_2 = \frac{1}{2}\frac{G_2}{g} r_2^2 \ddot{\varphi}_2$$

Uwaga: Zależności (4) i (5) wynikają z równań równowagi kintostatycznej na kierunkach prostopadłych do powierzchni realizowanego ruchu.

e) Zapisujemy równania więzów kinematycznych narzuconych na prędkości:

$$12)\ \bar{V}_D = \bar{V}_L$$

$$13)\ V_D = \omega_2 r_2$$

$$14)\ \bar{V}_0 = \bar{V}_S$$

$$15)\ \omega_2 r_2 = \omega_1 (R_1 - r_1)$$

$$16)\ \omega_1 = \frac{r_2}{R_1 - r_1}\omega_2$$

$$17)\ V_A = \omega_1 r_1 = \frac{r_1 r_2}{R_1 - r_1}\omega_2$$

W ogólnym równaniu dynamiki występują wartości wektorów przyspieszeń, więc należy wybrane równania więzów kinematycznych narzuconych na prędkości (13), (16), (17) zróżniczkować jednokrotnie względem czasu, otrzymując równania więzów kinematycznych narzuconych na przyspieszenia w następującej formie:

$$18)\quad \ddot{w}_D = r_2 \ddot{\varphi}_2$$

$$19)\quad \ddot{\varphi}_1 = \frac{r_2}{R_1 - r_1} \ddot{\varphi}_2$$

$$20)\quad \ddot{x}_A = \frac{r_1 r_2}{R_1 - r_1} \ddot{\varphi}_2$$

Ponadto zapisujemy równania więzów narzuconych na przesunięcia przygotowane. Należy mieć na uwadze, że wektor przesunięcia przygotowanego interpretujemy jako iloczyn wektora prędkości możliwej i bezwymiarowego współczynnika λ. W analizowanym przypadku otrzymamy więc:

$$21)\quad \delta r_D = r_2 \delta\varphi_2$$

$$22)\quad \delta\varphi_1 = \frac{r_2}{R_1 - r_1} \delta\varphi_2$$

$$23)\quad \delta r_A = \frac{r_1 r_2}{R_1 - r_1} \delta\varphi_2$$

d) Rozwiązanie:

$$24)\quad \delta L = \left(T_E - P\cos\beta - \frac{G_1}{g}\ddot{x}_A\right)\frac{r_1 r_2}{R_1 - r_1}\delta\varphi_2 + \left(-N_E f - T_E r_1 - \frac{G_1}{g} i_A^2 \ddot{\varphi}_1\right)\frac{r_2}{R_1 - r_1}\delta\varphi_2 + \left(-\frac{1}{2}\frac{G_2}{g} r_2^2 \ddot{\varphi}_2\right)\delta\varphi_2 + \left(G_3 \sin\alpha - T_K - \frac{G_3}{g}\ddot{w}_D\right) r_2 \delta\varphi_2 = 0$$

$$25)\quad \delta L = \left[-\frac{G_1}{g}\frac{r_1 r_2}{R_1 - r_1}\ddot{x}_A - \frac{G_1}{g} i_A^2 \frac{r_2}{R_1 - r_1}\ddot{\varphi}_1 - \frac{1}{2}\frac{G_2}{g} r_2^2 \ddot{\varphi}_2 - \frac{G_3}{g} r_2 \ddot{w}_D + \left(\cancel{T_E} - P\cos\beta\right)\frac{r_1 r_2}{R_1 - r_1} + \left(-N_E f - \cancel{T_E} r_1\right)\frac{r_2}{R_1 - r_1} + \left(G_3 \sin\alpha - T_K\right) r_2\right]\delta\varphi_2 = 0$$

Należy mieć na uwadze, że równanie (25) musy być spełnione dla wszystkich wartości $\delta\varphi_2$ również tych różnych od zera :

$$26)\quad \delta\varphi_2 \neq 0$$

Stąd wyrażenie w nawiasie kwadratowym [.]=0:

$$27)\quad -\frac{G_1}{g}\left(\frac{r_1 r_2}{R_1-r_1}\right)^2\ddot{\varphi}_2 - \frac{G_1}{g}i_A^2\left(\frac{r_2}{R_1-r_1}\right)^2\ddot{\varphi}_2 - \frac{1}{2}\frac{G_2}{g}r_2^2\ddot{\varphi}_2 - \frac{G_3}{g}r_2^2\ddot{\varphi}_2 +$$

$$-P\cos\beta\frac{r_1 r_2}{R_1-r_1} - N_E f\frac{r_2}{R_1-r_1} + (G_3\sin\alpha - T_k)r_2 = 0$$

$$28)\quad \left[\frac{G_1}{g}(r_1^2+i_A^2)\left(\frac{r_2}{R_1-r_1}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{G_2}{g}r_2^2 + \frac{G_3}{g}r_2^2\right]\ddot{\varphi}_2 =$$

$$= G_3 r_2\sin\alpha - \mu G_3 r_2\cos\alpha - P r_2\cos\beta\frac{r_1}{R_1-r_1} +$$

$$-(P\sin\beta + G_1) f\frac{r_2}{R_1-r_1}$$

Z zależności (28) wyznaczamy przyspieszenie kątowe krążka 2 w formie:

$$29)\quad \ddot{\varphi}_2 = \frac{g\left[G_3\sin\alpha - \mu G_3\cos\alpha - P\cos\beta\frac{r_1}{R_1-r_1} - (P\sin\beta+G_1)f\frac{1}{R_1-r_1}\right]\cancel{r_2}}{\left[G_1(r_1^2+i_A^2)\left(\frac{1}{R_1-r_1}\right)^2 + \frac{1}{2}G_2 + G_3\right]r_2^{\cancel{2}}}\qquad\left[\frac{rad}{s^2}\right]$$

Na tym etapie w celu autokorekty warto dokonać sprawdzenia jednostek:

$$\left[\frac{\frac{m}{s^2}\cdot\cancel{N}\cdot\cancel{m}}{\cancel{N}\,\cancel{m}^{2}} = \frac{rad}{s^2}\right]$$

Dalsza część rozwiązania przebiega jak w zad. 5 z zasady równowagi kinetostatycznej.

Proszę porównać wynik otrzymany z zastosowaniem ogólnego równania dynamiki oraz wynik otrzymany z zastosowaniem zasady równowagi kinetostatycznej. Warto na tym etapie również porównać złożoność rozwiązania zadania z zastosowaniem obydwu metod.