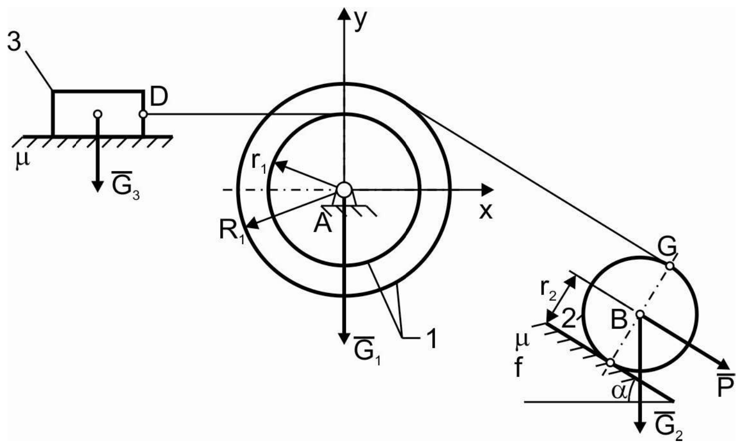
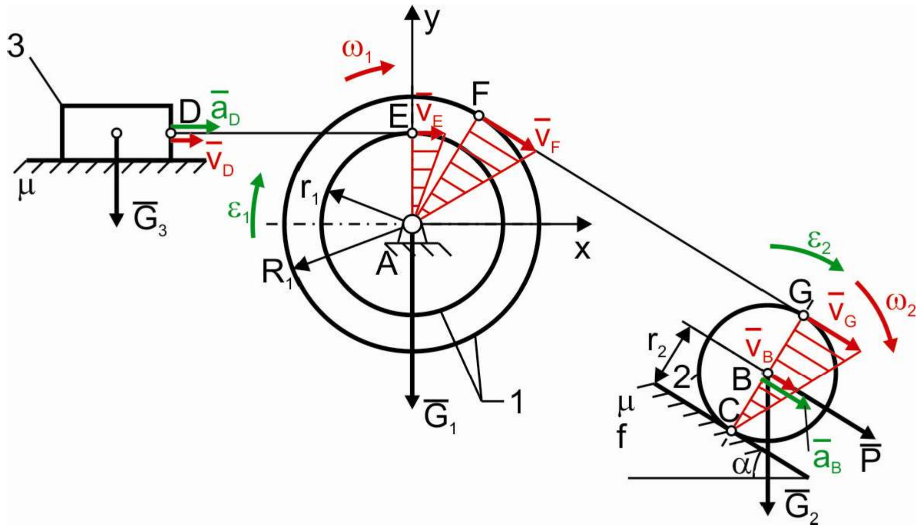
Przykład 3

Dla układu mechanicznego pokazanego na rysunku, wyznaczyć kinematyczne parametry ruchu krążka 1 stosując zasadę równowagi kinetostatycznej. Znane są promienie krążków r_1 [m], R_1 [m], r_2 [m], promień bezwładności krążka 1 $i_A^{(1)} = r_1$ [m], współczynnik tarcia suchego μ, współczynnik tarcia toczenia f [m], kąt pochylenia równi α [rad], wartość siły P [N] oraz ciężary członów G_1 [N], G_2 [N], G_3 [N].



Kinematyka układu.
1 – bryła w ruchu obrotowym,
2 – bryła w ruchu płaskim,
3 – bryła w ruchu postępowym.

Nie znamy prędkości żadnej bryły ani żadnego punktu układu. Ale załóżmy np. prędkość kątową krążka 1.



Z rozkładu prędkości układu wynika, że wszystkie charakterystyczne prędkości poszczególnych punktów i brył w układzie można wyrazić w funkcji prędkości ω_1 następująco:

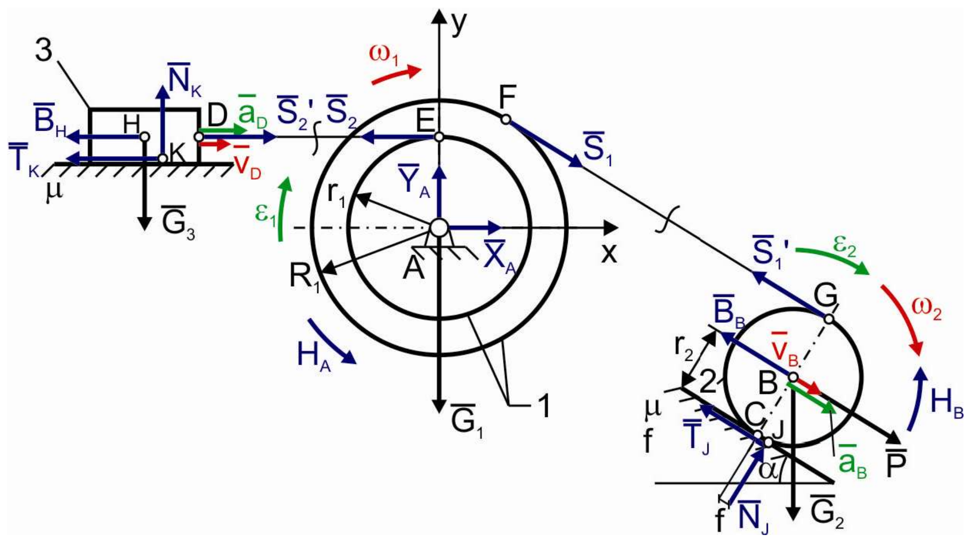
$$
\begin{aligned}
v_D &= v_E = r_1 \cdot \omega_1 \\
v_G &= v_F = R_1 \cdot \omega_1 \\
v_G &= 2 \cdot r_2 \cdot \omega_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{R_1}{2 \cdot r_2} \cdot \omega_1 \\
v_B &= \frac{1}{2} \cdot R_1 \cdot \omega_1
\end{aligned}
\tag{p3.1}
$$

Z kolei przyspieszenia poszczególnych punktów i brył to

$$
\begin{aligned}
a_D &= r_1 \cdot \varepsilon_1 \\
\varepsilon_2 &= \frac{R_1}{2 \cdot r_2} \cdot \varepsilon_1 \\
a_B &= \frac{1}{2} \cdot R_1 \cdot \varepsilon_1
\end{aligned}
\tag{p3.2}
$$

gdzie $\varepsilon_1 = \dot{\omega}_1$ to przyspieszenie kątowe krążka 1.

W celu opisania dynamiki układu przy pomocy zasady równowagi kinetostatycznej, układa się równania równowagi kinetostatycznej osobno dla każdej bryły. W tym celu najpierw wprowadza się wszystkie siły prawdziwe oraz siły fikcyjne (tzw. siły bezwładności) i twierdzi się, że są one w równowadze. Wprowadzone siły pokazano na poniższym rysunku.



Są to:

a) siły prawdziwe:

$\overline{X}_A, \overline{Y}_A$ - siły reakcji podpory w punkcie A,

$\overline{T}_J, \overline{N}_J$ - siły reakcji równi w punkcie J,

$\overline{T}_K, \overline{N}_K$ - siły reakcji równi w punkcie K,

$\overline{S}_1, \overline{S}_1^{'}$
$\overline{S}_2, \overline{S}_2^{'}$ - siły reakcji lin, to siły wewnętrzne układu.

b) siły fikcyjne

Bryła 1 jest w ruchu obrotowym względem punktu A, który jest jej środkiem masy. Redukcja sił bezwładności bryły 1 do punktu A daje

$$\overline{B}_A = -m_1 \cdot \overline{a}_A = 0 \tag{p3.3}$$

Ponieważ punkt A jest nieruchomy, oraz moment główny sił bezwładności

$$\begin{aligned} \overline{H}_A &= -I_A \cdot \overline{\varepsilon}_1 \\ H_A &= I_A \cdot \varepsilon_1 = \frac{G_1}{g} \cdot \left(i_A^{(1)}\right)^2 \cdot \varepsilon_1 \end{aligned} \tag{p3.4}$$

Bryła 2 jest w ruchu płaskim, a punkt B to jej środek masy. Siły bezwładności działające na bryłę 2 wynoszą

$$\begin{aligned} \overline{B}_B &= -m_2 \cdot \overline{a}_B \\ B_B &= m_2 \cdot a_B \end{aligned} \tag{p3.5}$$

Uwzględniając zależności kinematyczne, wartość tych sił to

$$B_B = \frac{1}{2} \cdot \frac{G_2}{g} \cdot R_1 \cdot \varepsilon_1 \tag{p3.6}$$

Moment główny sił bezwładności to

$$\begin{aligned} \overline{H}_B &= -I_B \cdot \overline{\varepsilon}_2 \\ H_B &= I_B \cdot \varepsilon_2 \end{aligned} \tag{p3.7}$$

a po uwzględnieniu zależności kinematycznych wartość tego momentu to

$$H_B = I_B \cdot \varepsilon_2 = \frac{G_2}{2 \cdot g} \cdot r_2^2 \cdot \frac{R_1}{2 \cdot r_2} \cdot \varepsilon_1 = \frac{G_2}{4 \cdot g} \cdot r_2 \cdot R_1 \cdot \varepsilon_1 \tag{p3.8}$$

Bryła 3 jest w ruchu postępowym z przyspieszeniem środka masy H równym $\overline{a}_H = \overline{a}_D$. Siły bezwładności działające na bryłę to

$$\begin{aligned} \overline{B}_H &= -m_3 \cdot \overline{a}_H \\ B_H &= m_3 \cdot a_H \end{aligned} \tag{p3.9}$$

a po uwzględnieniu zależności kinematycznych siły te mają wartość

$$B_H = \frac{G_3}{g} \cdot r_1 \cdot \varepsilon_1 \tag{p3.10}$$

Równania równowagi kinetostatycznej bryły 1:

$$X_A - S_2 + S_1 \cdot \cos\alpha = 0 \tag{p3.11}$$

$$Y_A - S_1 \cdot \sin\alpha - G_1 = 0 \tag{p3.12}$$

$$S_1 \cdot R_1 - S_2 \cdot r_1 - H_A = 0 \tag{p3.13}$$

Równania równowagi kinetostatycznej bryły 2:

$$P + G_2 \cdot \sin\alpha - T_J - S_1^{'} - B_B = 0 \tag{p3.14}$$

$$N_J - G_2 \cdot \cos\alpha = 0 \tag{p3.15}$$

$$T_J \cdot r_2 - N_J \cdot f - S_1^{'} \cdot r_2 - H_B = 0 \tag{p3.16}$$

Równania równowagi kinetostatycznej bryły 3:

$$S_2^{'} - T_K - B_H = 0 \tag{p3.17}$$

$$N_K - G_3 = 0 \tag{p3.18}$$

Siła tarcia rozwiniętego w punkcie K to

$$T_K = \mu \cdot N_K \qquad \text{(p3.19)}$$

Siły reakcji lin spełniają zależności

$$\begin{aligned} S_1 &= S_1' \\ S_2 &= S_2' \end{aligned} \qquad \text{(p3.20)}$$

Rozwiązanie równań (p3.4 – p3.20) daje

$$\varepsilon_1 = \frac{\frac{1}{2} P \cdot R_1 + \frac{1}{2} \cdot G_2 \cdot \left(\sin\alpha - \cos\alpha \cdot \frac{f}{r_2} \right) \cdot R_1 - \mu \cdot G_3 \cdot r_1}{G_1 \cdot \left(i_A^{(1)} \right)^2 + \frac{3}{8} \cdot G_2 \cdot R_1^2 + G_3 \cdot r_1^2} \cdot g = \varepsilon = \text{const} \qquad \text{(p3.21)}$$

Całkując dwukrotnie powyższe równanie z zerowymi warunkami początkowymi otrzymano prędkość kątową i kąt obrotu krążka 1

$$\omega_1 = \int_0^t \varepsilon_1 \cdot dt = \varepsilon \cdot t \qquad \text{(p3.22)}$$

$$\varphi_1 = \int_0^t \omega_1 \cdot dt = \frac{1}{2} \varepsilon \cdot t^2 \qquad \text{(p3.23)}$$