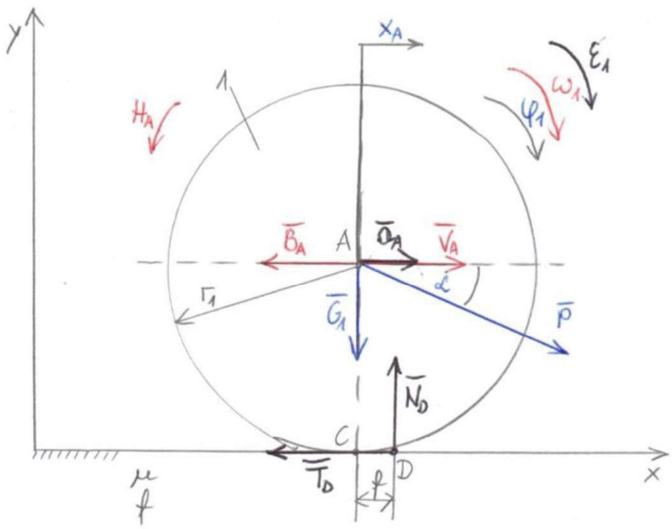
Zasada równowagi kinetostatycznej

Zad. 1.

Krążek 1 o znanym ciężarze i promieniu r_1 toczy się w prawo po płaskiej powierzchni pod wpływem siły P o kierunku jak pokazano na rysunku. Występuje zjawisko tarcia suchego oraz tarcia toczenia. Wyznacz kątowe parametry ruchu krążka 1.



Dane:

G_1, P [N]

r_1, f [m]

μ [-]

α [rad]

Szukane:

φ_1 = ?

Szukamy kątowych parametrów ruchu bryły 1.

Rozwiązanie:

a) Krążek toczy się bez poślizgu, jest więc w ruchu płaskim. Przyjmujemy interpretację ruchu płaskiego jako ruchu, w którym występuje przemieszczenie środka masy bryły w prawo (x_A) oraz obrót bryły wokół środka masy (φ_1). Przyjmujemy układ współrzędnych na rysunku w nieruchomym punkcie. Zaznaczamy podstawowe realizowane parametry ruchu, jak przemieszczenie środka masy x_A oraz kąt obrotu krążka φ_1. Wprowadzamy wektory prędkości punktów charakterystycznych oraz wektory prędkości kątowych brył niezbędne do rozwiązania zadania, jak również wektory przyspieszeń. Możemy wprowadzić na rysunku wszystkie wektory sił prawdziwych: czynnych (P, G_1) oraz biernych (T_D, N_D), jak również wektor siły fikcyjnej B_A i wektor momentu głównego sił bezwładności H_A.

b) Zapisujemy równania równowagi kinetostatycznej w postaci ogólnej:

$$1)\quad P_x + B_x = 0$$

$$2)\quad P_y + B_y = 0$$

$$3)\quad M_A + H_A = 0$$

gdzie:

$$P_x = \sum_{i=1}^{n} P_{ix}$$

$$P_y = \sum_{i=1}^{n} P_{iy}$$

$$M_A = \sum_{i=1}^{n} M_A(\overline{P}_i)$$

Uwaga: Wypisując wzory ogólne (1)-(3) zwracamy uwagę na indeksy przy poszczególnych symbolach. Poprawne zapisanie wzorów ogólnych na tym etapie ułatwi nam kolejny etap, gdzie będziemy tylko podstawiać do wzorów rzutując wektory sił i momentów. Nie będziemy się musieli już zastanawiać, o który rzut chodzi, czy względem którego bieguna wyznaczyć moment siły – odczytamy to z poprawnie zapisanego wzoru ogólnego.

c) Podstawiamy do równań (1)-(3) rzuty wektorów sił i momentów wynikające z rysunku:

4) $P\cos\alpha - T_D - B_A = 0$

5) $N_D - G_1 - P\sin\alpha = 0$

6) $T_D r_1 - N_D f - H_A = 0$

d) Zapisujemy równania więzów siłowych, jeżeli takie wynikają z przyjętego modelu, oraz zapisujemy wartości wielkości niezbędnych do rozwiązania zadania:

7) $T_D \leq \mu N_D$

8) $N_D = G_1 + P\sin\alpha$

9) $T_D = P\cos\alpha - B_A$

10) $B_A = m_1 a_A = \frac{G_1}{g}\ddot{x}_A$

11) $H_A = J_A \cdot \varepsilon_1 = \frac{1}{2}\frac{G_1}{g} r_1^2 \ddot{\varphi}_1$

e) Zapisujemy równania więzów kinematycznych narzuconych na prędkości:

12) $v_A = \omega_1 r_1$

W równaniach równowagi kinetostatycznej występują wartości wektorów przyspieszeń, więc należy równania więzów kinematycznych narzuconych na prędkości zróżniczkować jednokrotnie względem czasu, otrzymując równania więzów kinematycznych narzuconych na przyspieszenia w następującej formie:

13) $\ddot{x}_A = \ddot{\varphi}_1 r_1$

f) Rozwiązanie:

14) $(P\cos\alpha - B_A) r_1 - (G_1 + P\sin\alpha) f - H_A = 0$

15) $\left(P\cos\alpha - \frac{G_1}{g}\ddot{x}_A\right) r_1 - (G_1 + P\sin\alpha) f - \frac{1}{2}\frac{G_1}{g} r_1^2 \ddot{\varphi}_1 = 0$

16) $\frac{G_1}{g}\ddot{x}_A r_1 + \frac{1}{2}\frac{G_1}{g} r_1^2 \ddot{\varphi}_1 = P r_1 \cos\alpha - (G_1 + P\sin\alpha) f$

17) $\frac{G_1}{g} r_1^2 \ddot{\varphi}_1 + \frac{1}{2}\frac{G_1}{g} r_1^2 \ddot{\varphi}_1 = P r_1 \cos\alpha - (G_1 + P\sin\alpha) f$

18) $\frac{3}{2}\frac{G_1}{g} r_1^2 \ddot{\varphi}_1 = P r_1 \cos\alpha - (G_1 + P\sin\alpha) f$

Z zależności (18) wyznaczamy przyspieszenie kątowe krążka 1 w formie:

19) $\ddot{\varphi}_1 = \frac{2g}{3 G_1 r_1^2}\left[P r_1 \cos\alpha - (G_1 + P\sin\alpha) f\right] \left[\frac{rad}{s^2}\right]$

Na tym etapie w celu autokorekty warto dokonać sprawdzenia jednostek:

$$\left[\frac{\frac{m}{s^2}\cdot[N\cdot m]}{N\cdot m^2} = \frac{rad}{s^2}\right]$$

Ze względu na to, że prawa strona równania (19) jest stała względem czasu, oraz w celu skrócenia zapisu, zastosujemy podstawienie:

$$20)\quad \ddot{\varphi}_1 = \varepsilon$$

Pozostałe kątowe parametry ruchu krążka 1 to:

$$21)\quad \dot{\varphi}_1 = \int \ddot{\varphi}_1\, dt = \varepsilon t + C_1$$

$$22)\quad \varphi_1 = \int \dot{\varphi}_1\, dt = \frac{1}{2}\varepsilon t^2 + C_1 t + C_2$$

Stałe całkowania wyznaczymy, jeżeli znamy warunki początkowe, np. zerowe warunki początkowe:

$$\text{dla } t = t_0 = 0\ [s]$$
$$\varphi_1(0) = 0\ [rad]$$
$$\dot{\varphi}_1(0) = 0\ \left[\frac{rad}{s}\right]$$

Stałe całkowania przyjmują wartości:

$$C_1 = 0$$
$$C_2 = 0$$

Stąd ostatecznie:

$$23)\quad \ddot{\varphi}_1 = \varepsilon$$

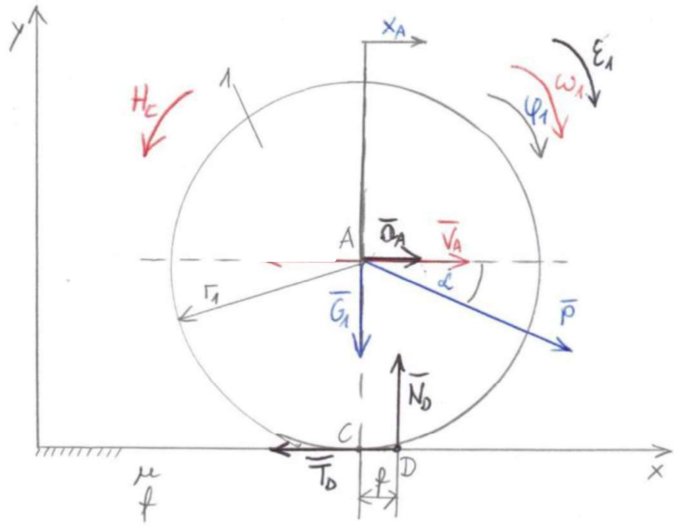
$$24)\quad \dot{\varphi}_1 = \varepsilon t$$

$$25)\quad \varphi_1 = \frac{1}{2}\varepsilon t^2$$

Równania (23)-(25) to kątowe parametry ruchu krążka 1. Proszę samodzielnie dopisac jednostki do równań (23)-(25).

Zad. 2.

Krążek 1 o znanym ciężarze i promieniu r_1 toczy się w prawo po płaskiej powierzchni pod wpływem siły P o kierunku jak pokazano na rysunku. Występuje zjawisko tarcia suchego oraz tarcia toczenia. Wyznacz kątowe parametry ruchu krążka 1.



Dane:

G_1, P [N]

r_1, f [m]

μ [-]

α [rad]

Szukane:

φ_1 = ?

Szukamy kątowych parametrów ruchu bryły 1.

Rozwiązanie:

a) Krążek toczy się bez poślizgu, jest więc w ruchu płaskim. Przyjmujemy układ współrzędnych na rysunku w nieruchomym punkcie. Zaznaczamy podstawowe realizowane parametry ruchu, jak przemieszczenie środka masy x_A oraz kąt obrotu krążka φ_1. Wprowadzamy wektory prędkości punktów charakterystycznych oraz wektory prędkości kątowych brył niezbędne do rozwiązania zadania, jak również wektory przyspieszeń. Możemy wprowadzić na rysunku wszystkie wektory sił prawdziwych: czynnych (P, G_1) oraz biernych (T_D, N_D), jak również wektor momentu głównego sił bezwładności H_C względem chwilowego środka obrotu. W rozwiązaniu tego przykładu zastosujemy podejście, w którym ruch płaski krążka potraktujemy jako chwilowy ruch obrotowy wokół chwilowego środka obrotu w punkcie C. Ogólną formę równania wynikającego z zasady równowagi kinetostatycznej w omawianym przypadku zapiszemy jako:

$$1)\quad M_C + H_C = 0$$

gdzie:

$$M_C = \sum_{i=1}^{n} M_C(\bar{P}_i)$$

Uwaga: M_C to wartość wektora momentu głównego siły prawdziwych względem chwilowego środka obrotu, punktu C, H_C to wartość wektora momentu głównego sił bezwładności względem chwilowego środka obrotu.

b) Podstawiamy do równania (1) rzuty wektorów momentów wynikające z rysunku:

$$2)\quad P r_1 \cos\alpha - N_D f - H_C = 0$$

c) Zapisujemy równania więzów siłowych, jeżeli takie wynikają z przyjętego modelu, oraz zapisujemy wartości wielkości niezbędnych do rozwiązania zadania:

$$3)\quad N_D - G_1 - P\sin\alpha = 0$$

$$4)\quad N_D = G_1 + P\sin\alpha$$

$$5)\quad T_D \leq \mu N_D$$

$$6)\quad H_C = J_C \ddot{\varphi}_1$$

$$7)\quad J_C = J_A + m_1 \cdot r_1^2$$

$$8)\quad J_C = \frac{1}{2} m_1 r_1^2 + m_1 r_1^2 = \frac{3}{2}\frac{G_1}{g} r_1^2$$

Uwaga: Zależność (7) to masowy moment bezwładności bryły (krążka) względem chwilowego środka obrotu w punkcie C, wyznaczony z zastosowaniem twierdzenia Steiner'a.

d) Rozwiązanie:

$$9)\quad P r_1 \cos\alpha - N_D f - \frac{3}{2}\frac{G_1}{g} r_1^2 \ddot{\varphi}_1 = 0$$

$$10)\quad \frac{3}{2}\frac{G_1}{g} r_1^2 \ddot{\varphi}_1 = P r_1 \cos\alpha - (G_1 + P\sin\alpha) f$$

Z zależności (10) wyznaczamy przyspieszenie kątowe krążka 1 w formie:

$$11)\quad \ddot{\varphi}_1 = \frac{2g}{3 G_1 r_1^2}\left[P r_1 \cos\alpha - (G_1 + P\sin\alpha) f\right] \left[\frac{rad}{s^2}\right]$$

Na tym etapie w celu autokorekty warto dokonać sprawdzenia jednostek:

$$\left[\frac{\frac{m}{s^2}\cdot[N\cdot m]}{N\cdot m^2} = \frac{rad}{s^2}\right]$$

Dalsza część rozwiązania przebiega jak w zadaniu 1:

Ze względu na to, że prawa strona równania (11) jest stała względem czasu, oraz w celu skrócenia zapisu, zastosujemy podstawienie:

$$20)\quad \ddot{\varphi}_1 = \varepsilon$$

Pozostałe kątowe parametry ruchu krążka 1 to:

$$21)\quad \dot{\varphi}_1 = \int \ddot{\varphi}_1\, dt = \varepsilon t + C_1$$

$$22)\quad \varphi_1 = \int \dot{\varphi}_1\, dt = \frac{1}{2}\varepsilon t^2 + C_1 t + C_2$$

Stałe całkowania wyznaczymy, jeżeli znamy warunki początkowe, np. zerowe warunki początkowe:

dla $t = t_0 = 0\ [s]$

$\varphi_1(0) = 0\ [rad]$

$\dot{\varphi}_1(0) = 0\ \left[\frac{rad}{s}\right]$

Stałe całkowania przyjmują wartości:

$C_1 = 0$

$C_2 = 0$

Stąd ostatecznie:

$$23)\quad \ddot{\varphi}_1 = \varepsilon$$

$$24)\quad \dot{\varphi}_1 = \varepsilon t$$

$$25)\quad \varphi_1 = \frac{1}{2}\varepsilon t^2$$

Równania (23)-(25) to kątowe parametry ruchu krążka 1. Proszę samodzielnie dopisac jednostki do równań (23)-(25).