3. Zasada równowagi kinetostatycznej

Równanie ruchu dla dowolnego punktu poruszającego się po torze ma postać

$$m \cdot \overline{a}_M = \overline{P}$$

gdzie $\overline{P} = \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i$. Temu równaniu ruchu możemy nadać prostszą postać, przenosząc wszystkie wyrazy na jedna stronę. Otrzymamy wówczas

$$\overline{P} + \left(-m \cdot \overline{a}_M\right) = 0$$

Oznaczmy:
$\overline{B} = -m \cdot \overline{a}_M$ - tzw. siła bezwładności (siła fikcyjna)
$B = m \cdot a_M$ - wartość siły bezwładności

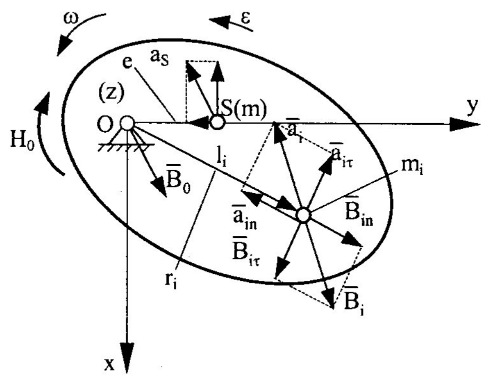
Równanie ruchu zapiszemy w postaci

$$\overline{P} + \overline{B} = 0$$

To równanie to tzw. zasada d'Alamberta, zwana również zasadą równowagi kinetostatycznej opisującej ruch punktu materialnego. Z powyższego równania wynika, że w każdej chwili suma geometryczna sił prawdziwych $\overline{\mathrm{P}}$ działających na punkt materialny oraz sił bezwładności $\overline{\mathrm{B}}$ jest równa zero. Zasadę tę można stosować do opisu zjawiska ruchu punktu, bryły lub układu brył. W przypadku opisu ruchu bryły działanie wszystkich sił bezwładności zastępujemy wektorem głównym i momentem głównym tych sił. Wektory te wynikają z redukcji sił bezwładności do dowolnie wybranego bieguna redukcji. Przeprowadzając redukcję tych sił, dostajemy wyniki takie jak w podanych dalej przypadkach.

Ruch obrotowy bryły

W przypadku ruchu obrotowego (rys. 1) przyspieszenie i-tego punktu jest sumą geometryczną przyspieszenia normalnego i stycznego.



Rys. 1

Przyspieszenie normalne i-tego punktu:

$$a_{in} = \omega^2 \cdot l_i \tag{1}$$

Przyspieszenie styczne i-tego punktu:

$$a_{i\tau} = \varepsilon \cdot l_i \tag{2}$$

Siły fikcyjne to:

$\overline{B}_{in} = -m_i \cdot \overline{a}_{in}$ - tzw. siła odśrodkowa (3)

$\overline{B}_{i\tau} = -m_i \cdot \overline{a}_{i\tau}$ - tzw. siła bezwładności pochodząca od przyspieszenia stycznego (4)

Redukujemy układ sił bezwładności, np. do punktu O (tj. nieruchomego punktu leżącego na osi obrotu bryły), wówczas wektor główny sił bezwładności:

$$\overline{B}_O = \sum_{i=1}^{n} \overline{B}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(-m_i \cdot \overline{a}_i\right) = -\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \overline{a}_i = -m \cdot \overline{a}_S \tag{5}$$

co do wartości:

$$B_O = m \cdot a_S = m \cdot e \cdot \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2} \tag{6}$$

gdzie e - odległość środka masy od punktu obrotu bryły.
Natomiast moment główny sił bezwładności:

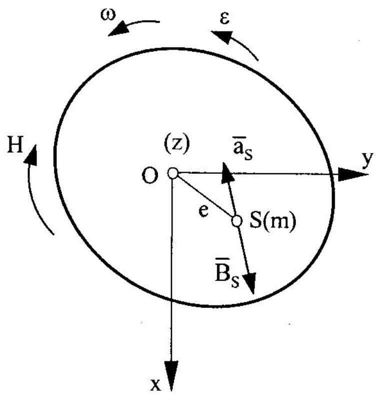
$$\overline{H}_O = \sum_{i=1}^{n} \left(\overline{r}_i \times \overline{B}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\overline{r}_i \times \overline{B}_{i\tau}\right) = \sum_{i=1}^{n} \left[\overline{r}_i \times \left(-m_i \cdot \overline{a}_{i\tau}\right)\right] = \sum_{i=1}^{n} \left[\overline{r}_i \times \left(-m_i \cdot \left\{\overline{r}_i \times \overline{\varepsilon}\right\}\right)\right] \tag{7}$$

$$\overline{H}_O = -\overline{\varepsilon} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot r_i^2 = -\overline{\varepsilon} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot l_i^2 = -I_O \cdot \overline{\varepsilon} \qquad (8)$$

Układ sił bezwładności zredukowany do punktu O, to:

- wektor główny sił bezwładności $\overline{B}_O$,
- moment główny sił bezwładności $\overline{H}_O$,

Za biegun redukcji możemy przyjmować dowolny punkt, np. środek masy bryły, jak pokazano na rys. 2.



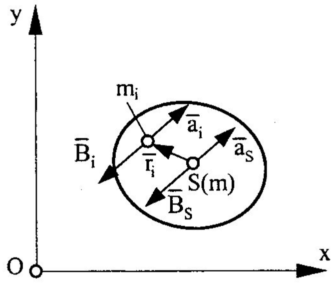
Rys. 2

$$\begin{cases} \overline{B}_S = -m \cdot \overline{a}_S \\ B_S = m \cdot a_S = m \cdot e \cdot \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2} \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} \overline{H}_S = -I_O \cdot \overline{\varepsilon} \\ H_S = I_O \cdot \varepsilon \end{cases} \tag{10}$$

Ruch postępowy bryły (rys. 3)

Przyspieszenie dowolnego punktu należącego do bryły jest równe przyspieszeniu środka masy bryły:



Rys. 3

$$\overline{a}_S = \cdot \overline{a}_i \tag{11}$$

Siła bezwładności działająca na i-ty punkt to

$$\overline{B}_i = -m_i \cdot \overline{a}_i \tag{12}$$

Redukujemy układ sił bezwładności do środka masy układu i mamy wektor główny sił bezwładności:

$$\overline{B}_S = \sum_{i=1}^{n} \overline{B}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(-m_i \cdot \overline{a}_i \right) = -\overline{a}_S \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i = -m \cdot \overline{a}_S \tag{13}$$

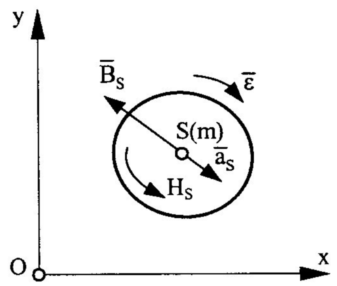
gdzie: $\overline{B}_S = -m \cdot \overline{a}_S$ - wektor główny sił bezwładności,

$B_S = m \cdot a_S$ - wartość wektora głównego sił bezwładności.

Ponieważ bryła jest w ruchu postępowym, to wektor momentu głównego sił bezwładności będzie mieć postać:

$$\overline{H}_S = \sum_{i=1}^{n} \overline{M}_S \left(\overline{B}_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\overline{r}_i \times \overline{B}_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left[\overline{r}_i \times \left(-m_i \cdot \overline{a}_i \right) \right] = 0 \text{ ponieważ } \overline{\varepsilon} = 0, \varepsilon = 0 \tag{14}$$

Ruch płaski bryły (rys. 4)



Rys. 4

Siły bezwładności redukujemy do środka masy bryły i mamy:

$\overline{B}_S = -m \cdot \overline{a}_S$ - wektor główny sił bezwładności (15)

$B_S = m \cdot a_S$ (16)

Moment główny sił bezwładności określony względem środka masy to:

$$\begin{cases} \overline{H}_S = -I_S \cdot \overline{\varepsilon} \\ H_S = I_S \cdot \varepsilon \end{cases} \tag{17}$$