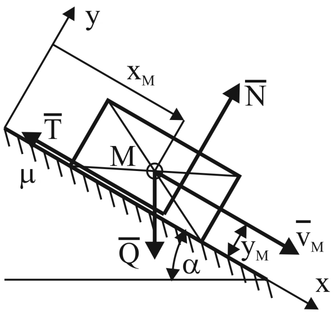
SPIS TREŚCI

1. DYNAMICZNE RÓWNANIA RUCHU PUNKTU

Zadanie 1.1. Bryła o ciężarze $\overline{Q}$ znajduje się na równi nachylonej do poziomu pod kątem α. Współczynnik tarcia suchego dla pary równia-bryła wynosi μ. Znane są warunki początkowe układu. Należy podać rozwiązanie zadania prostego dynamiki, tzn. określić przemieszczenie, prędkość oraz przyspieszenie bryły.
Rozwiązanie. Bryła porusza się ruchem postępowym, zatem można ją modelować punktem, np. M. Należy założyć kierunek ruchu punktu M, tj. wprowadzić prędkość punku $\overline{v}_M$. Następnie należy przyjąć układ odniesienia. Wygodnie jest to zrobić w taki sposób, aby jedna z osi układu odniesienia, np. oś x była równoległa do kierunku ruchu.



Rys. 1.1

Dane:
Q [N]
α [rad]
μ=const.
warunki początkowe:
dla $t = t_0 = 0$ [s], $x_M = x_0$ [m], $\dot{x}_M = v_0$ [m/s]

Należy wprowadzić wszystkie siły bierne, czyli w tym przypadku reakcje podłoża: styczną $\overline{T}$ i normalną $\overline{N}$. Siła tarcia $\overline{T}$ będzie zwrócona przeciwnie do założonego kierunku ruchu. Wówczas dynamiczne równania ruchu będą miały postać:

$$m\ddot{x}_M = Q\sin\alpha - T \tag{1.1}$$

$$m\ddot{y}_M = N - Q\cos\alpha \tag{1.2}$$

Zakłada się, że bryła cały czas ma kontakt z równią, a to oznacza, że punkt M nie przemieszcza się na kierunku osi y. Wynika stąd, że:

$$\begin{cases} y_M = \text{const.} \\ \dot{y}_M = 0 \\ \ddot{y}_M = 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

Zatem z równania (1.2) łatwo określić wartość reakcji N jako:

$$N = Q\cos\alpha \tag{1.4}$$

Siłę tarcia T określono z zależności:

$$T = \mu N = \mu Q\cos\alpha \tag{1.5}$$

Znając siłę tarcia oraz wiedząc, że m=Q/g, z równania (1.1) można wyznaczyć przyspieszenie punktu M jako:

$$\ddot{x}_M = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \tag{1.6}$$

Ponieważ

$$\ddot{x}_M = \frac{d\dot{x}_M}{dt} \tag{1.7}$$

to równanie ruchu na kierunku osi x będzie miało postać:

$$\frac{d\dot{x}_M}{dt} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \tag{1.8}$$

skąd

$$d\dot{x}_M = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)dt \tag{1.9}$$

Równanie (1.9) można łatwo rozwiązać przez całkowanie, czyli

$$\dot{x}_M = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)t + C_1 \tag{1.10}$$

gdzie C_1 to stała całkowania. Ponieważ

$$\dot{x}_M = \frac{dx_M}{dt} \tag{1.11}$$

to równanie (1.10) będzie miało postać

$$\frac{dx_M}{dt} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)t + C_1 \tag{1.12}$$

skąd

$$dx_M = \left[g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)t + C_1\right]dt \tag{1.13}$$

Całkując obustronnie równanie (1.13) otrzymano

$$x_M = \frac{1}{2}g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)t^2 + C_1 t + C_2 \tag{1.14}$$

Stałe całkowania C_1 i C_2 można wyznaczyć, jeśli znane są warunki początkowe. Podstawiając warunki początkowe do równań (1.10) i (1.14) otrzymano

$$C_1 = V_0 \tag{1.15}$$
$$C_2 = x_0$$

Ostatecznie ruch masy na kierunku osi x opisują równania

$$\begin{cases} x_M = \frac{1}{2}g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)t^2 + v_0 t + x_0 \\ \dot{x}_M = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)t + v_0 \\ \ddot{x}_M = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \end{cases} \tag{1.16}$$

Rozważmy przypadek ruchu z zerową prędkością początkową, czyli v_0=0. Wówczas prędkość masy opisuje równanie

$$\dot{x}_M = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)t \tag{1.17}$$

Aby masa zsuwała się po równi, jak to założono na rys. 1, dla $t > 0$ $\dot{x}_M > 0$. Stąd wynika, że musi być spełniony warunek

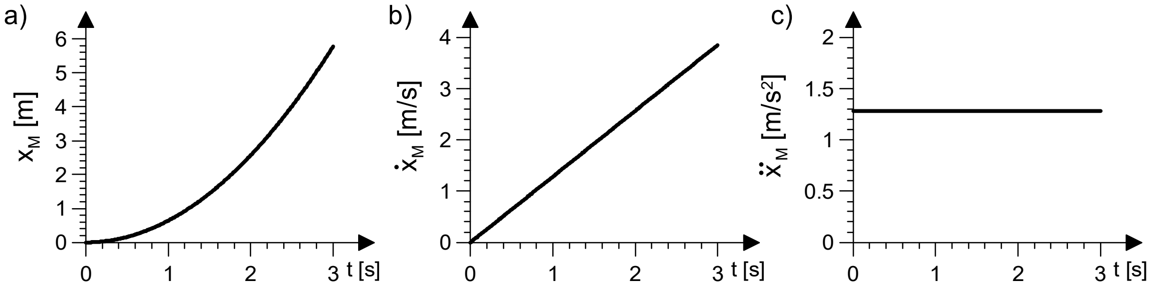
$$\sin\alpha - \mu\cos\alpha > 0 \tag{1.18}$$

i dalej

$$\mathrm{tg}\alpha > \mu \tag{1.19}$$

Jeżeli dla $t > 0$ $\dot{x}_M = 0$ to $\mathrm{tg}\alpha = \mu$ i wówczas równię nazywamy samohamowną.

Dla danych liczbowych Q=10 [N], α=0.5 [rad], μ=0.3 [-], g=10 [m/s^2], x_0=0 [m], v_0=0 [m/s] otrzymano rozwiązanie zadania prostego dynamiki przedstawione na rys. 1.2.



Rys. 1.2. Rozwiązanie zadania prostego dynamiki: a) przemieszczenie punktu M, b) prędkość punktu M, c) przyspieszenie punktu M na kierunku osi x

Zadanie 1.2. Bryła o ciężarze $\overline{Q}$ znajduje się na poziomej płaszczyźnie i porusza się pod wpływem siły $\overline{F}$ zmieniającej się harmonicznie. Współczynnik tarcia suchego dla pary równia-bryła wynosi $\mu = 0$. Znane są warunki początkowe układu. Należy podać rozwiązanie zadania prostego dynamiki, tzn. określić przemieszczenie, prędkość oraz przyspieszenie bryły.

Dane:

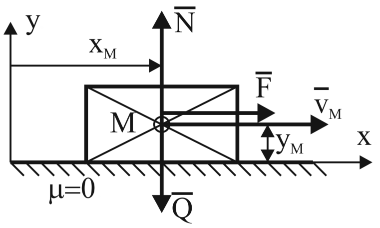
Q [N]

$\mu = 0$

$F = F_0 \cos(\omega t)$ [N]; F_0 [N] = const.; ω [rad/s] = const.

dla $t = t_0 = 0$[s], $x_M = x_0$ [m], $\dot{x}_M = v_0$ [m/s]

Rozwiązanie. Bryła porusza się ruchem postępowym, zatem można ją modelować punktem, np. M. Należy założyć kierunek ruchu punktu M, przyjąć układ odniesienia oraz wprowadzić siły działające na masę.



Rys. 1.3

Dynamiczne równania ruchu będą miały postać:

$$m\ddot{x}_M = F \tag{1.20}$$

$$m\ddot{y}_M = N - Q = 0 \tag{1.21}$$

Z równania (1.21) można określić wartość siły reakcji $N = Q$. Natomiast uwzględniając, że m=Q/g oraz F=F₀cos(ωt) z równania (1.20) można wyznaczyć przyspieszenie punktu M jako:

$$\ddot{x}_M = \frac{F_0 g}{Q}\cos(\omega t) \tag{1.22}$$

Całkując równanie (1.22) otrzymano prędkość masy na kierunku osi x:

$$\dot{x}_M = \frac{F_0 g}{Q\omega}\sin(\omega t) + C_1 \tag{1.23}$$

Z kolei całkując równanie (1.23) wyznaczono przemieszczenie masy:

$$x_M = -\frac{F_0 g}{Q\omega^2}\cos(\omega t) + C_1 t + C_2 \tag{1.24}$$

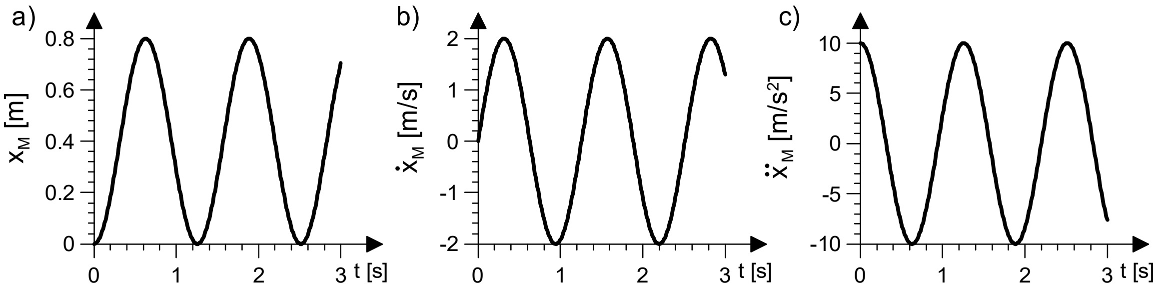
Wstawiając warunki początkowe do równań (1.23) i (1.24) wyznaczono stałe całkowania jako

$$\begin{cases} C_1 = v_0 \\ C_2 = x_0 + \dfrac{F_0 g}{Q\omega^2} \end{cases} \tag{1.25}$$

Ostatecznie ruch masy na kierunku osi x opisują równania

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{F_0 g}{Q\omega^2}\left[1-\cos(\omega t)\right] + v_0 t + x_0 \\ \dot{x}_M = \dfrac{F_0 g}{Q\omega}\sin(\omega t) + v_0 \\ \ddot{x}_M = \dfrac{F_0 g}{Q}\cos(\omega t) \end{cases} \tag{1.26}$$

Dla danych liczbowych Q=10 [N], F_0=10 [N], ω=5 [rad/s], g=10 [m/s^2], x_0=0 [m], v_0=0 [m/s] otrzymano rozwiązanie zadania prostego dynamiki przedstawione na rys. 1.4.



Rys. 1.4. Rozwiązanie zadania prostego dynamiki: a) przemieszczenie punktu M, b) prędkość punktu M, c) przyspieszenie punktu M na kierunku osi x

Zadanie 1.3. Bryła o ciężarze $\overline{Q}$ przemieszcza się po poziomej płaszczyźnie. W czasie ruchu występuje siła oporu $G = G(\dot{x}_M) = \alpha\dot{x}_M$, której wartość jest proporcjonalna do prędkości bryły. Współczynnik tarcia suchego dla pary równia-bryła wynosi μ=0. Znane są warunki początkowe układu. Należy podać rozwiązanie zadania prostego dynamiki, tzn. określić przemieszczenie, prędkość oraz przyspieszenie bryły.

Dane:

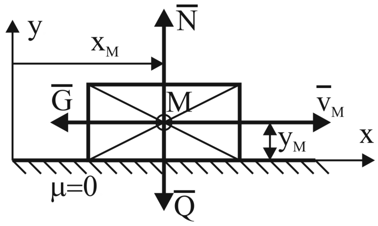
Q [N]

$\mu = 0$

$G = \alpha\dot{x}_M$ [N]; α [kg/s] = const.

dla $t = t_0 = 0$[s], $x_M = x_0$ [m], $\dot{x}_M = v_0$ [m/s]

Rozwiązanie. Bryła porusza się ruchem postępowym, zatem można ją modelować punktem, np. M. Należy założyć kierunek ruchu punktu M, przyjąć układ odniesienia oraz wprowadzić siły działające na masę.



Rys. 1.5

Dynamiczne równania ruchu będą miały postać:

$$m\ddot{x}_M = -G \tag{1.27}$$

$$m\ddot{y}_M = N - Q = 0 \tag{1.28}$$

Czyli ruch masy na kierunku osi x opisuje równanie:

$$\frac{Q}{g}\ddot{x}_M = -\alpha\dot{x}_M \tag{1.29}$$

Oznaczając $\frac{g\alpha}{Q} = c$ przyjmie ono postać

$$\ddot{x}_M + c\dot{x}_M = 0 \tag{1.30}$$

Równania (1.30) nie można rozwiązać przez proste całkowanie, gdyż nie można rozdzielić zmiennych, czyli szuka się rozwiązania w postaci (tzw. podstawienie Eulera):

$$x_M = Ae^{rt} \tag{1.31}$$

gdzie A oraz r są wartościami stałymi, na tym etapie nieznanymi. Aby je wyznaczyć należy zróżniczkować dwukrotnie równanie (1.31) i pochodne wprowadzić do równania (1.30). Zatem

$$\begin{aligned} \dot{x}_M &= Are^{rt} \\ \ddot{x}_M &= Ar^2e^{rt} \end{aligned} \tag{1.32}$$

Równanie (1.30) przyjmie postać

$$A\left(r^2 + cr\right)e^{rt} = 0 \tag{1.33}$$

Równanie (1.33) będzie zawsze spełnione jeżeli

$$r^2 + cr = 0 \tag{1.34}$$

Stąd określimy r jako

$$r_1 = 0, r_2 = -c \tag{1.35}$$

W rozwiązaniu (1.31) należy uwzględnić obydwie wartości r, zatem

$$x_M = A_1e^{r_1t} + A_2e^{r_2t} \tag{1.36}$$

Uwzględniając (1.35) otrzymano

$$x_M = A_1 + A_2e^{-ct} \tag{1.37}$$

Różniczkując (1.37) otrzymano prędkość masy jako:

$$\dot{x}_M = -A_2ce^{-ct} \tag{1.38}$$

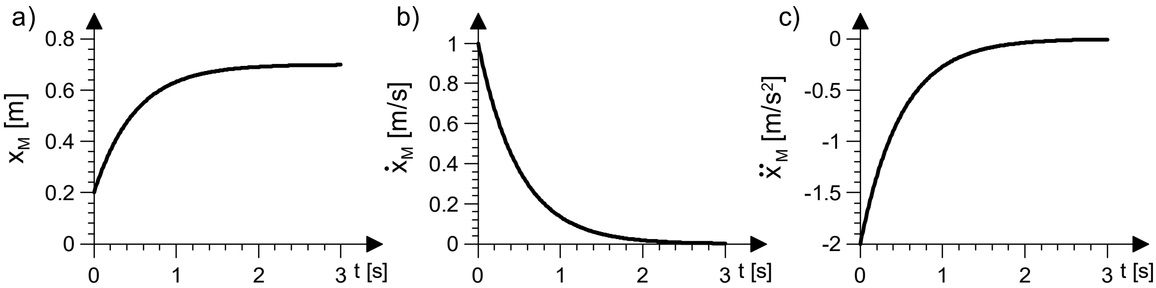
Podstawiając warunki początkowe do równań (1.37) i (1.38) wyznaczono stałe A_1 i A_2:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{v_0}{c} + x_0 \\ A_2 &= -\frac{v_0}{c} \end{aligned} \tag{1.39}$$

Ostatecznie ruch masy na kierunku osi x opisują równania

$$\begin{cases} x_M = \frac{v_0}{c}\left(1-e^{-ct}\right)+x_0 \\ \dot{x}_M = v_0 e^{-ct} \\ \ddot{x}_M = -v_0 c e^{-ct} \end{cases} \tag{1.40}$$

Dla danych liczbowych Q=10 [N], α=0.2 [kg/s], g=10 [m/s^2], x_0=0.2 [m], v_0=1 [m/s] otrzymano rozwiązanie zadania prostego dynamiki przedstawione na rys. 1.6.



Rys. 1.6. Rozwiązanie zadania prostego dynamiki: a) przemieszczenie punktu M, b) prędkość punktu M, c) przyspieszenie punktu M na kierunku osi x

Zadanie 1.4. Bryła o ciężarze $\overline{Q}$ przemieszcza się po chropowatej równi pod wpływem pewnej siły $\overline{F}$ tak, że przyspieszenie bryły jest stałe i wynosi $\overline{a}_M$. Równia jest nachylona do poziomu pod kątem α. Współczynnik tarcia suchego dla pary równia-bryła wynosi μ. Należy podać rozwiązanie zadania odwrotnego dynamiki, tzn. określić wartość siły $\overline{F}$.

Dane:

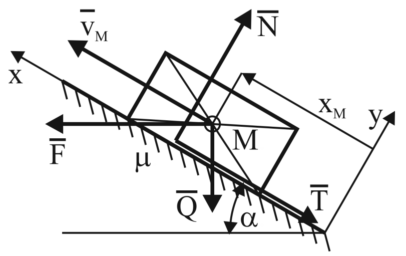
$Q\,[N]$

μ

$\alpha\,[rad]$

$\ddot{x}_M = a_M\,[m/s^2] = const.$

Rozwiązanie. Bryła porusza się ruchem postępowym, zatem można ją modelować punktem, np. M. Należy założyć kierunek ruchu punktu M, przyjąć układ odniesienia oraz wprowadzić siły działające na masę.



Rys. 1.7

Dynamiczne równania ruchu będą miały postać:

$$m\ddot{x}_M = F\cos\alpha - Q\sin\alpha - T \tag{1.41}$$

$$m\ddot{y}_M = N - Q\cos\alpha - F\sin\alpha = 0 \quad (1.42)$$

Z równania (1.42) należy określić reakcję N jako:

$$N = Q\cos\alpha + F\sin\alpha \quad (1.43)$$

Siłę tarcia T określono z zależności:

$$T = \mu N = \mu\left(Q\cos\alpha + F\sin\alpha\right) \quad (1.44)$$

Wprowadzając siłę tarcia do równania (1.41) oraz wiedząc, że m=Q/g, $\ddot{x}_M = a_M$ równanie (1.41) zapiszemy w następującej postaci:

$$\frac{Q}{g}a_M = F\cos\alpha - Q\sin\alpha - \mu Q\cos\alpha - \mu F\sin\alpha \quad (1.45)$$

Stąd łatwo wyznaczyć siłę F jako:

$$F = \frac{\frac{a_M}{g} + \sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}Q \quad (1.46)$$

Dla danych liczbowych Q=10 [N], α=0.5 [rad], μ=0.3 [-], g=10 [m/s^2], a_M=1 [m/s^2] otrzymano w wyniku rozwiązania zadania odwrotnego dynamiki wartość siły F=11.48 [N].

Zadanie 1.5. Bryła o ciężarze $\overline{Q}$ znajduje się na poziomej płaszczyźnie i porusza się pod wpływem siły F zmieniającej się harmonicznie. Ponadto na bryłę działają siły $F=kx_M$ oraz $G=\alpha\dot{x}_M$. Współczynnik tarcia suchego dla pary równia-bryła wynosi μ=0. Znane są warunki początkowe układu. Należy podać różniczkowe równania ruchu.

Dane:

Q [N]

$\mu = 0$

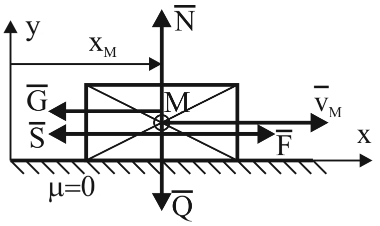
$F = F_0\cos(\omega t);\ F_0\ [N] = const.;\ \omega\ [rad/s] = const.$

$S=kx_M$ [N]; k[N/m]=const.

$G=\alpha\dot{x}_M$ [N]; α[Ns/m]=const.

dla $t = t_0 = 0[s],\ x_M = x_0\,[m],\ \dot{x}_M = v_0\,[m/s]$

Rozwiązanie. Bryła porusza się ruchem postępowym, zatem można ją modelować punktem, np. M. Należy założyć kierunek ruchu punktu M, przyjąć układ odniesienia oraz wprowadzić siły działające na masę.



Rys. 1.8

Dynamiczne równania ruchu będą miały postać:

$$m\ddot{x}_M = F - S - G \quad (1.47)$$

$$m\ddot{y}_M = N - Q = 0 \quad (1.48)$$

Wiedząc, że $F = F_0 \cos(\omega t)$, $S = kx_M$ oraz $G = \alpha \dot{x}_M$, równanie (1.47) zapiszemy w postaci:

$$m\ddot{x}_M + \alpha \dot{x}_M + kx_M = F_0 \cos(\omega t) \qquad (1.49)$$

Tego typu równanie zwykle zapisuje się w następującej postaci:

$$\ddot{x}_M + 2h\dot{x}_M + \omega_0^2 x_M = F_x \cos(\omega t) \qquad (1.50)$$

gdzie $2h = \frac{\alpha}{m}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $F_x = \frac{F_0}{m}$.

Równanie (1.50) jest równaniem różniczkowym niejednorodnym o stałych współczynnikach. Istnieje jego analityczne rozwiązanie, jest ono złożone, nie podano tu tego rozwiązania.

2. ENERGIA KINETYCZNA I PRACA UKŁADU SIŁ. MOC UKŁADU SIŁ

a) Energia kinetyczna (energia ruchu)

Energia kinetyczna punktu dana jest wzorem

$$E=\frac{1}{2}mv^2 \tag{2.1}$$

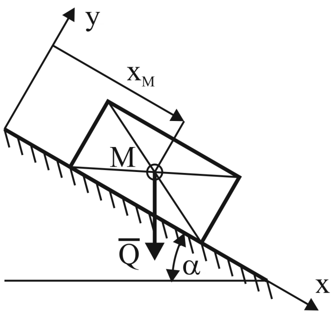
gdzie m to masa a v to wartość prędkości punktu.

Zadanie 2.1. Bryła o ciężarze $\overline{Q}$ znajduje się na równi nachylonej do poziomu pod kątem α. Znane jest przemieszczenie bryły. Należy podać energię kinetyczną masy.

Dane:

Q [N]

$x_M=\lambda t^2$ [m]; λ[m/s^2]=const.



Rys. 2.1

Rozwiązanie. Bryła porusza się ruchem postępowym, zatem jej energię kinetyczną należy obliczyć ze wzoru:

$$E=\frac{1}{2}mv_M^2 \tag{2.2}$$

Wiedząc, jaką funkcją czasu jest przemieszczenie punktu M, łatwo obliczyć prędkość punktu M jako

$$v_M=\dot{x}_M=2\lambda t \tag{2.3}$$

oraz energię kinetyczną jako:

$$E=2\frac{Q}{g}\lambda^2t^2\;[\mathrm{Nm}] \tag{2.4}$$

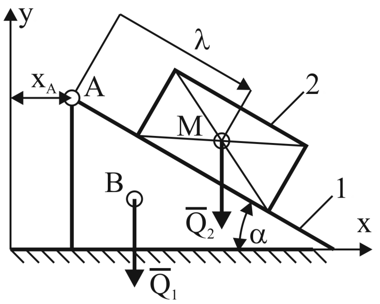
Zadanie 2.2. Bryła 1 o ciężarze $\overline{Q}_1$ porusza się po powierzchni płaskiej. Znane jest przemieszczenie punktu A należącego do tej bryły. Bryła 1 stanowi jednocześnie równię pochyłą o kącie nachylenia α, po której porusza się bryła 2 o ciężarze $\overline{Q}_2$. Przemieszczenie bryły 2 jest również znane. Należy podać energię kinetyczną układu.

Dane:

$$\left.\begin{matrix} Q_1 \\ Q_2 \end{matrix}\right\} [N]$$

$$\left.\begin{matrix} x_A = x_A(t) \\ \lambda = \lambda(t) \end{matrix}\right\} [m]$$

α [rad]



Rys. 2.2

Rozwiązanie. Energia kinetyczna układu jest sumą energii kinetycznych wszystkich brył wchodzących w skład układu. Bryły 1 i 2 poruszają się ruchem postępowym, zatem jej energię kinetyczną należy obliczyć ze wzoru:

$$E = \frac{1}{2} m_1 v_A^2 + \frac{1}{2} m_2 v_M^2 \tag{2.5}$$

Wiedząc, że przemieszczenie punktu A jest funkcją czasu, prędkość punktu A wyrazimy jako:

$$v_A = \dot{x}_A \tag{2.6}$$

Aby określić prędkość punktu M najpierw należy określić przemieszczenia punktu M na kierunkach osi x oraz y jako:

$$x_M = x_A + \lambda\cos\alpha \tag{2.7}$$

$$y_M = y_A - \lambda\sin\alpha \tag{2.8}$$

Wiedząc, że y_A=const., rzuty prędkości punktu M na osie układu odniesienia określimy jako:

$$\dot{x}_M = \dot{x}_A + \dot{\lambda}\cos\alpha \tag{2.9}$$

$$\dot{y}_M = -\dot{\lambda}\sin\alpha \tag{2.10}$$

a prędkość całkowitą punktu M określimy jako

$$v_M = \sqrt{\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2} = \sqrt{\left(\dot{x}_A + \dot{\lambda}\cos\alpha\right)^2 + \left(\dot{\lambda}\sin\alpha\right)^2} = \sqrt{\dot{x}_A^2 + 2\dot{x}_A\dot{\lambda}\cos\alpha + \dot{\lambda}^2} \tag{2.11}$$

Wówczas energia kinetyczna układu będzie wyrażona jako:

$$E = \frac{1}{2g}\left[Q_1\dot{x}_A^2 + Q_2\left(\dot{x}_A^2 + 2\dot{x}_A\dot{\lambda}\cos\alpha + \dot{\lambda}^2\right)\right][Nm] \tag{2.12}$$

b) Praca siły i układu sił, moc chwilowa układu sił

Praca całkowita układu sił L jest całką z pracy elementarnej δL układu sił:

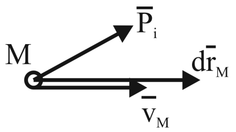
$$L = \int \delta L \tag{2.13}$$

Natomiast praca elementarna układu sił δL jest sumą prac elementarnych wszystkich sił δL_i działających w układzie:

$$\delta L=\sum_i \delta L_i \qquad (2.14)$$

Z kolei praca elementarna siły jest równa iloczynowi siły $\overline{P}_i$ i elementarnego przesunięcia $d\overline{r}_M$ punktu, w którym zaczepiona jest siła:

$$\delta L_i=\overline{P}_i d\overline{r}_M \qquad (2.15)$$



Rys. 2.3

Moc chwilowa układu N to pochodna pracy elementarnej względem czasu

$$N=\frac{\delta L}{dt} \qquad (2.16)$$

Jeżeli bryła znajduje się w ruchu postępowym, to moc chwilową można obliczać wg wzoru:

$$N=\overline{P}\overline{V}_M\ [W] \qquad (2.17)$$

gdzie $\overline{P}$ to wypadkowy wektor układu sił, $\overline{v}_M$ to wektor prędkości.

Zadanie 2.3. Na bryłę o ciężarze $\overline{Q}$ znajdującej się na powierzchni płaskiej działa układ sił przedstawiony na rysunku: stała siła $\overline{F}$ i siła reakcji sprężyny $\overline{S}$. Należy obliczyć pracę wykonaną przez układ sił przy przesunięciu układu z położenia I do II o λ, oraz moc układu w położeniu II, jeżeli wiadomo, że wartość prędkości bryły wynosi wówczas v_M^{II}.

Dane:

Q [N]

F [N]=const.

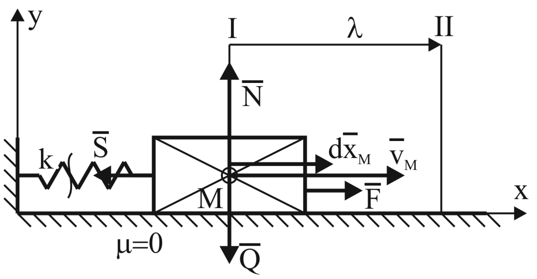
$S=kx_M$ [N]

k [N/m]=const.

λ [m]

v_M^{II} [m/s]

Rozwiązanie. Bryła porusza się ruchem postępowym, zatem można ją modelować punktem, np. M. Należy przyjąć układ odniesienia oraz wprowadzić siły działające na masę. Punkt przemieszcza się z położenia I do II więc należy wprowadzić wektor prędkości $\overline{v}_M$, oraz wektor elementarnego przemieszczenia $d\overline{x}_M$ o zwrocie zgodnym z wektorem prędkości.



Rys. 2.4

Rozwiązanie. Prace elementarne sił działających na bryłę to:

$$\delta L_1 = \overline{F} d\overline{x}_M = F dx_M \tag{2.18}$$

$$\delta L_2 = \overline{Q} d\overline{x}_M = 0 \tag{2.19}$$

$$\delta L_3 = \overline{N} d\overline{x}_M = 0 \tag{2.20}$$

$$\delta L_4 = \overline{S} d\overline{x}_M = -S dx_M = -k x_M dx_M \tag{2.21}$$

gdzie $d\overline{r}_M = d\overline{x}_M$. Praca elementarna układu sił to

$$\delta L = \left(F - k x_M\right) dx_M \tag{2.22}$$

Pracę całkowitą układu sił otrzymuje się przez całkowanie powyższego równania

$$L = \int \delta L = \int_0^\lambda \left(F - k x_M\right) dx_M = F\lambda - \frac{1}{2} k \lambda^2 \tag{2.23}$$

Moc chwilowa układu to:

$$N = \overline{P}\overline{V}_M^{II} = \left(\overline{F} + \overline{Q} + \overline{N} + \overline{S}\right) \overline{V}_M^{II} = \left(F - S\right) V_M^{II} = \left(F - k\lambda\right) V_M^{II} \left[W\right] \tag{2.24}$$

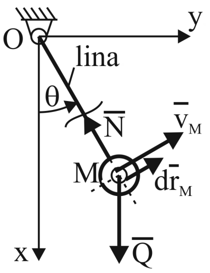
Zadanie 2.4. Wahadło matematyczne o długości l i ciężarze $\overline{Q}$ wykonuje oscylacje wokół położenia równowagi. Znany jest przebieg kąta wychylenia wahadła θ= θ (t). Należy obliczyć pracę wykonaną przez układ sił działających na wahadło oraz moc układu.

Dane:

Q [N]

$\theta = \theta_0 \cos\left(\omega t\right)$ [rad]; θ_0 [rad]=const.; ω [rad/s]=const.

OM=l [m]



Rys. 2.5

Rozwiązanie. Prace elementarne sił działających na bryłę to:

$$\delta L_1 = \overline{Q} d\overline{r}_M = -Q \sin\theta dr_M \tag{2.25}$$

$$\delta L_2 = \overline{N} d\overline{r}_M = 0 \tag{2.26}$$

Praca elementarna układu sił to

$$\delta L = -Q \sin \theta dr_M \tag{2.27}$$

Przemieszczenie elementarne punktu M można wyrazić w funkcji elementarnego obrotu jako:

$$dr_M = l d\theta \tag{2.28}$$

zatem praca elementarna to:

$$\delta L = -Ql \sin \theta d\theta \tag{2.29}$$

Pracę całkowitą układu sił otrzymuje się przez całkowanie powyższego równania

$$L = \int \delta L = \int_0^\theta - Ql \sin \theta d\theta = Ql(\cos\theta - 1) \tag{2.30}$$

Moc chwilowa układu to:

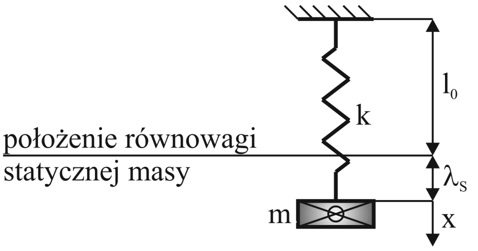
$$N = \overline{P}\overline{v}_M = \left(\overline{Q} + \overline{N}\right)\overline{v}_M = -Q\sin\theta\overline{v}_M = -Q\sin\theta\dot{\theta}l = Ql\theta_0\omega\sin\theta\sin\left(\omega t\right)\left[W\right] \tag{2.31}$$

3. RÓWNOWAGA UKŁADU W POLU POTENCJALNYM

Zgodnie z kryterium Lagrange'a Dirichleta równowaga układu występuje w polu potencjalnym tam gdzie potencjał pola jest minimalny.

Zadanie 3.1. Na sprężynie o współczynniku sprężystości k zawieszono masę m. Należy określić położenie równowagi statycznej masy.

Dane:
k [N/m]
m [kg]



Rys. 3.1. l_0 to długość początkowa sprężyny, λ_S to przypuszczalna statyczna deformacja sprężyny, x to założone przemieszczenie masy mierzone od położenia równowagi statycznej

Rozwiązanie. Potencjał układu to:

$$V = V_1 + V_2 \tag{3.1}$$

gdzie: V_1 to potencjał sprężyny, V_2 to potencjał masy w polu ziemskim. Potencjał sprężyny to:

$$V_1 = \frac{1}{2} k\Delta^2 \tag{3.2}$$

gdzie: $\Delta=\lambda_S+x$ to całkowita deformacja sprężyny. Potencjał masy w polu ziemskim to:

$$V_2 = -mgx \tag{3.3}$$

Zatem całkowity potencjał jest funkcją założonego przemieszczenia masy:

$$V = V(x) = \frac{1}{2} k(\lambda_S + x)^2 - mgx \tag{3.4}$$

W celu znalezienia minimum potencjału V należy zastosować znane z matematyki postępowanie poszukiwania minimum funkcji:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = k(\lambda_S + x) - mg \tag{3.5}$$

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x=0} = k\lambda_S - mg = 0 \tag{3.6}$$

Stąd wynika, że $\lambda_S=mg/k$. Jest to statyczna deformacja sprężyny, czyli w położeniu równowagi statycznej sprężyna jest wstępnie napięta bo przenosi siłę $S=k\lambda_S$. Sprawdzamy jeszcze czy potencjał osiąga minimum czyli czy jest spełniony następujący warunek:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} > 0 \tag{3.7}$$

Różniczkując równanie (3.5) otrzymamy, że $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = k > 0$, czyli warunek jest spełniony k ma wartość dodatnią.

Zadanie 3.2. Do pręta o masie m i długości l zamocowanego przegubowo w punkcie A zamocowano dwie sprężyny o współczynnikach sprężystości k_1 i k_2. Należy określić położenie równowagi statycznej układu.

Dane :

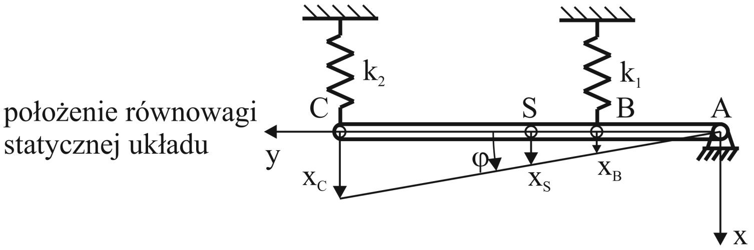
$$\left.\begin{matrix} k_1 \\ k_2 \end{matrix}\right\} [\mathrm{N/m}]$$

$$m\,[\mathrm{kg}]$$

$$AC = l[\mathrm{m}]$$

$$AS = \frac{1}{2} l[\mathrm{m}]$$

$$AB = \frac{1}{3} l[\mathrm{m}]$$



Rys. 3.2

Rozwiązanie. Po wychyleniu układu z położenia równowagi statycznej o kąt φ punkty B, S i C doznają małych przemieszczeń x_B, x_S i x_C. Potencjał układu to:

$$V = V_1 + V_2 \qquad (3.8)$$

gdzie: V_1 to potencjał sprężyn, V_2 to potencjał masy w polu ziemskim. Potencjał sprężyn to:

$$V_1 = \frac{1}{2} k_1 \Delta_1^2 + \frac{1}{2} k_2 \Delta_2^2 \qquad (3.9)$$

gdzie: $\Delta_1 = \lambda_{S1} + x_B$, $\Delta_2 = \lambda_{S2} + x_C$ to całkowite deformacje sprężyn. Potencjał masy w polu ziemskim to:

$$V_2 = -mgx_S \qquad (3.10)$$

Przemieszczenia punktów są związane z kątem wychylenia pręta poprzez następujące zależności:

$$x_B = \frac{1}{3} l\sin\varphi$$

$$x_S = \frac{1}{2} l\sin\varphi \qquad (3.11)$$

$$x_C = l\sin\varphi$$

Zakłada się że kąt φ jest mały tzn. w praktyce $|\varphi| < 0.3$ [rad]. Wówczas można skorzystać z przybliżenia $\sin\varphi \approx \varphi$, czyli:

$$x_B = \frac{1}{3} l\varphi$$

$$x_S = \frac{1}{2} l\varphi \qquad (3.12)$$

$$x_C = l\varphi$$

Zatem całkowity potencjał jest funkcją kąta wychylenia pręta:

$$V = V(\varphi) = \frac{1}{2}k_1(\lambda_{S1} + \frac{1}{3}l\varphi)^2 + \frac{1}{2}k_2(\lambda_{S2} + l\varphi)^2 - \frac{1}{2}mgl\varphi \tag{3.13}$$

Szukamy minimum funkcji V czyli:

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \frac{1}{3}k_1 l(\lambda_{S1} + \frac{1}{3}l\varphi) + k_2 l(\lambda_{S2} + l\varphi) - \frac{1}{2}mgl \tag{3.14}$$

$$\left.\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0} = \frac{1}{3}k_1 l\lambda_{S1} + k_2 l\lambda_{S2} - \frac{1}{2}mgl = 0 \tag{3.15}$$

Wiadomo, iż z podobieństwa trójkątów wynika proporcja, że $\frac{x_B}{x_C} = \frac{AB}{AC}$, czyli:

$$\frac{\lambda_{S1}}{\lambda_{S2}} = \frac{\frac{1}{3}l}{l} \tag{3.16}$$

Z równań (3.15) i (3.16) można określić statyczne deformacje sprężyn jako:

$$\lambda_{S1} = \frac{mg}{\frac{2}{3}k_1 + 6k_2}$$
$$\lambda_{S2} = \frac{3mg}{\frac{2}{3}k_1 + 6k_2} \tag{3.17}$$

W położeniu równowagi statycznej sprężyny są wstępnie napięte bo przenoszą siły $S_1=k_1\lambda_{S1}$ i $S_2=k_2\lambda_{S2}$. Sprawdzamy jeszcze czy potencjał osiąga minimum czyli czy jest spełniony następujący warunek:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} > 0 \tag{3.18}$$

Różniczkując równanie (3.14) otrzymamy, że $\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{9}k_1 l^2 + k_2 l^2 > 0$, czyli warunek jest spełniony bo k_1 i k_2 są dodatnie.

4. DYNAMIKA UKŁADU PUNKTÓW MATERIALNYCH

a) współrzędne środka masy układu

Zadanie 4.1. Dany jest mechanizm płaski – układ korbowo-wodzikowy. Znane są ciężary brył $\overline{Q}_1$, $\overline{Q}_2$ i $\overline{Q}_3$, długości członów 1 i 2 oraz kąt obrotu korby 1. Należy określić współrzędne środka masy układu oraz prędkość środka masy układu.

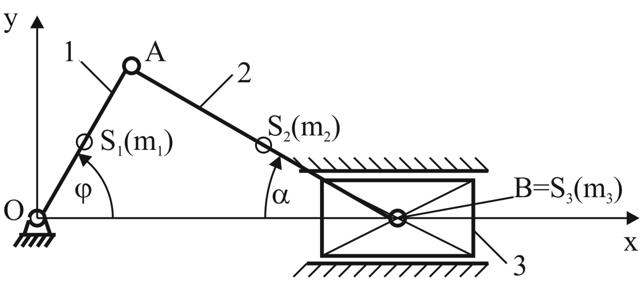
Dane:

$$\left.\begin{matrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{matrix}\right\} [N]$$

$OA = r$ [m]

$AB = a$ [m]

$\varphi = \varphi(t)$



Rys. 4.1

Rozwiązanie. Wprowadza się środki masy każdej bryły jako S_1, S_2 i S_3 (to te same punkty, co środki ciężkości brył), więc:

$$OS_1 = \frac{1}{2} r \qquad AS_2 = \frac{1}{2} a \tag{4.1}$$

W tych punktach umieszcza się masy m_1, m_2 i m_3 i mamy płaski układ mas. Współrzędne środka masy całego układu określa się z zależności:

$$m x_S = m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 \tag{4.2}$$

$$m y_S = m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 \tag{4.3}$$

gdzie z geometrii wynika, że:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{r}{2}\cos\varphi & y_1 &= \frac{r}{2}\sin\varphi \\ x_2 &= r\cos\varphi + \frac{a}{2}\cos\alpha & y_2 &= r\sin\varphi - \frac{a}{2}\sin\alpha \\ x_3 &= r\cos\varphi + a\cos\alpha & y_3 &= 0 \end{aligned} \tag{4.4}$$

oraz:

$$\sin\alpha = \frac{r}{a}\sin\varphi \qquad \cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}\sin^2\varphi} \tag{4.5}$$

Zatem na podstawie (4.2) i (4.3) współrzędne środka masy to:

$$x_S = \frac{\frac{1}{2}m_1 + m_2 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3} r\cos\varphi + \frac{\frac{1}{2}m_2 + m_3}{m_1 + m_2 + m_3} a\cos\alpha \tag{4.6}$$

$$y_S = \frac{\frac{1}{2}m_1 + m_2}{m_1 + m_2 + m_3} r\sin\varphi - \frac{\frac{1}{2}m_2}{m_1 + m_2 + m_3} a\sin\alpha \tag{4.7}$$

Wykorzystując zależności (4.5) oraz wiedząc, że $m_1 = \frac{Q_1}{g}$, $m_2 = \frac{Q_2}{g}$ i $m_3 = \frac{Q_3}{g}$, zapisano:

$$x_S = \frac{\frac{1}{2}Q_1 + Q_2 + Q_3}{Q_1 + Q_2 + Q_3} r\cos\varphi + \frac{\frac{1}{2}Q_2 + Q_3}{Q_1 + Q_2 + Q_3} \sqrt{a^2 - r^2\sin^2\varphi} \tag{4.8}$$

$$y_S = \frac{\frac{1}{2}Q_1 + \frac{1}{2}Q_2}{Q_1 + Q_2 + Q_3} r\sin\varphi \tag{4.9}$$

Ponieważ kąt obrotu bryły 1 jest funkcją czasu, to parametryczne równania ruchu środka masy są również funkcją czasu. Prędkość środka masy układu to:

$$v_S = \sqrt{\dot{x}_S^2 + \dot{y}_S^2} \tag{4.10}$$

gdzie:

$$\dot{x}_S = -\left(\frac{\frac{1}{2}Q_1 + Q_2 + Q_3}{Q_1 + Q_2 + Q_3} + \frac{\frac{1}{2}Q_2 + Q_3}{Q_1 + Q_2 + Q_3} \cdot \frac{r\cos\varphi}{\sqrt{a^2 - r^2\sin^2\varphi}} \right) \dot{\varphi} r\sin\varphi \tag{4.11}$$

$$\dot{y}_S = \frac{\frac{1}{2}Q_1 + \frac{1}{2}Q_2}{Q_1 + Q_2 + Q_3} \dot{\varphi} r\cos\varphi \tag{4.12}$$

b) wektor pędu układu

Wektor pędu układu jest równy wektorowi pędu środka masy układu, czyli:

$$\overline{Q}_S = m\overline{v}_S = \sum_i m_i \overline{v}_i \tag{4.13}$$

rzutując równanie (13) na osie układu odniesienia otrzymano:

$$Q_{Sx} = m\dot{x}_S \tag{4.14}$$

$$Q_{Sy} = m\dot{y}_S \tag{4.15}$$

$$Q_{Sz} = m\dot{z}_S \tag{4.16}$$

Zadanie 4.2. Dla układu jak w zadaniu 1 należy obliczyć wektor pędu układu.

Rozwiązanie. Znając rzuty prędkości środka masy w układzie xy, rzuty wektora pędu na osie układu określono jako:

$$Q_{Sx} = -\frac{1}{g}\left(\frac{1}{2}Q_1 + Q_2 + Q_3 + \left(\frac{1}{2}Q_2 + Q_3 \right) \cdot \frac{r\cos\varphi}{\sqrt{a^2 - r^2\sin^2\varphi}} \right) \dot{\varphi} r\sin\varphi \tag{4.17}$$

$$Q_{Sy} = \frac{1}{2g}\left(Q_1 + Q_2 \right) \dot{\varphi} r\cos\varphi \tag{4.18}$$

Wartość wektora pędu to:

$$Q_S = \sqrt{Q_{Sx}^2 + Q_{Sy}^2} =$$

$$\frac{r\dot{\varphi}}{g}\sqrt{\left(\frac{1}{2}Q_1 + Q_2 + Q_3 + \left(\frac{1}{2}Q_2 + Q_3\right)\cdot\frac{r\cos\varphi}{\sqrt{a^2 - r^2\sin^2\varphi}}\right)^2 \sin^2\varphi + \frac{1}{4}\left(Q_1 + Q_2\right)^2\cos^2\varphi}\left[kg\frac{m}{s}\right] \tag{4.19}$$

Kierunek wektora pędu określono poprzez podanie kąta pomiędzy wektorem pędu a osią x jako:

$$\beta = \text{atan}\frac{Q_{Sy}}{Q_{Sx}} \tag{4.20}$$

c) dynamiczne równania ruchu środka masy

Każdy układ punktów materialnych ma jeden charakterystyczny punkt zwany środkiem masy. Ruch środka masy wynika z równania:

$$m\bar{a}_S = \sum_i \bar{P}_i \tag{4.21}$$

gdzie m to całkowita masa układu, $\bar{a}_S$ to wektor przyspieszenia środka masy układu, $\bar{P}_i$ to wektor wypadkowy sił zewnętrznych działających na układ, gdyż tylko takie siły mogą spowodować ruch środka masy układu. Rzutując równanie (4.21) na osie układu odniesienia otrzymano dynamiczne równania ruchu środka masy układu

$$m\ddot{x}_S = \sum_i P_{ix} \tag{4.22}$$

$$m\ddot{y}_S = \sum_i P_{iy} \tag{4.23}$$

$$m\ddot{z}_S = \sum_i P_{iz} \tag{4.24}$$

Zadanie 4.3. Pryzma 1 pozostaje na nieruchomej powierzchni poziomej. Po bryle 1 przemieszcza się bryła 2. Znane jest przemieszczenie względne s bryły 2 względem 1. Znane są ciężary brył $\bar{Q}_1$ i $\bar{Q}_2$ oraz założono, że pomiędzy podłożem a bryłą 1 nie występuje tarcie. Należy podać dynamiczne równania ruchu środka masy.

Dane:

$$\left.\begin{matrix} Q_1 \\ Q_2 \end{matrix}\right\} [N]$$

s=s(t) [m]

α [rad]

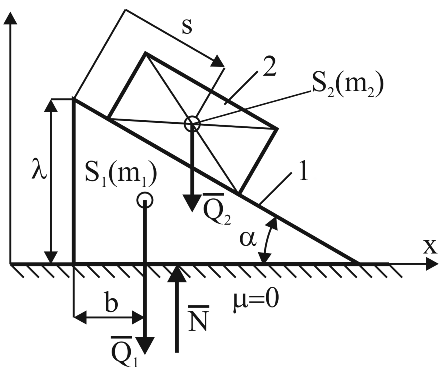
λ [m]=const.

b [m]=const.

μ=0

warunki początkowe:

dla $t = t_0 = 0$ [s], $x_1 = x_{10}$ [m], $\dot{x}_1 = v_{10}$ [m/s]



Rys. 4.2

Rozwiązanie. Wprowadza się wszystkie siły zewnętrzne działające na układ. W rozpatrywanym przypadku będą to ciężary brył oraz reakcja normalna podłoża $\overline{N}$. Nie wprowadza się reakcji pomiędzy bryłami 1 i 2 ponieważ są to siły wewnętrzne układu. Dynamiczne równania ruchu środka masy mają postać:

$$m\ddot{x}_S = \sum_i P_{ix} = 0 \tag{4.25}$$

$$m\ddot{y}_S = \sum_i P_{iy} = N - Q_1 - Q_2 \tag{4.26}$$

Ponieważ współrzędne środka masy układu maja postać:

$$x_S = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m} \tag{4.27}$$

$$y_S = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m} \tag{4.28}$$

zatem równania (4.25) i (4.26) przyjmą postać:

$$m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 = 0 \tag{4.29}$$

$$m_1\ddot{y}_1 + m_2\ddot{y}_2 = N - Q_1 - Q_2 \tag{4.30}$$

Z geometrii układu wynika, że:

$$\begin{cases} x_1 = ? \\ x_2 = x_1 - b + s\cos\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = h_1 = \text{const.} \\ y_2 = \lambda - s\sin\alpha \end{cases} \tag{4.31}$$

czyli

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = ? \\ \dot{x}_2 = \dot{x}_1 + \dot{s}\cos\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{y}_1 = 0 \\ \dot{y}_2 = -\dot{s}\sin\alpha \end{cases} \tag{4.32}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = ? \\ \ddot{x}_2 = \ddot{x}_1 + \ddot{s}\cos\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} \ddot{y}_1 = 0 \\ \ddot{y}_2 = -\ddot{s}\sin\alpha \end{cases} \tag{4.33}$$

i równania ruchu środka masy zapisano jako:

$$m_1\ddot{x}_1 + m_2(\ddot{x}_1 + \ddot{s}\cos\alpha) = 0 \tag{4.34}$$

$$-m_2\ddot{s}\sin\alpha = N - Q_1 - Q_2 \tag{4.35}$$

Z równania (4.35) wyznaczono wartość siły nacisku na podłoże:

$$N = Q_1 + Q_2 - m_2\ddot{s}\sin\alpha = Q_1 + Q_2\left(1 - \frac{\ddot{s}}{g}\sin\alpha\right) \tag{4.36}$$

Natomiast z równania (4.34) wyznaczono przyspieszenie masy m_1:

$$\ddot{x}_1 = -\frac{m_2\ddot{s}\cos\alpha}{m_1 + m_2} \tag{4.37}$$

Rozwiązując powyższe równanie można obliczyć prędkość i przemieszczenie masy m_1:

$$\dot{x}_1 = -\frac{m_2 \dot{s} \cos\alpha}{m_1 + m_2} + C_1 \tag{4.38}$$

$$x_1 = -\frac{m_2 s \cos\alpha}{m_1 + m_2} + C_1 t + C_2 \tag{4.39}$$

Podstawiając do równań (4.38) i (4.39) warunki początkowe wyznaczono stałe całkowania:

$$C_1 = v_{10} + \frac{m_2 \dot{s}_0 \cos\alpha}{m_1 + m_2} \tag{4.40}$$

$$C_2 = x_{10} + \frac{m_2 s_0 \cos\alpha}{m_1 + m_2} \tag{4.41}$$

gdzie s_0 i $\dot{s}_0$ to znane początkowe przemieszczenie i prędkość względna masy 2. Wiedząc, że $m_1 = \frac{Q_1}{g}$ i $m_2 = \frac{Q_2}{g}$ ostatecznie równania opisujące ruch bryły 1 będą miały postać:

$$x_1 = -\frac{Q_2 s \cos\alpha}{Q_1 + Q_2} + \left(v_{10} + \frac{Q_2 \dot{s}_0 \cos\alpha}{Q_1 + Q_2} \right) t + x_{10} + \frac{Q_2 s_0 \cos\alpha}{Q_1 + Q_2} \tag{4.42}$$

$$\dot{x}_1 = -\frac{Q_2 \dot{s} \cos\alpha}{Q_1 + Q_2} + v_{10} + \frac{Q_2 \dot{s}_0 \cos\alpha}{Q_1 + Q_2} \tag{4.43}$$

$$\ddot{x}_1 = -\frac{Q_2 \ddot{s} \cos\alpha}{Q_1 + Q_2} \tag{4.44}$$

Natomiast ruch masy 2 na kierunku osi x opisany jest równaniami:

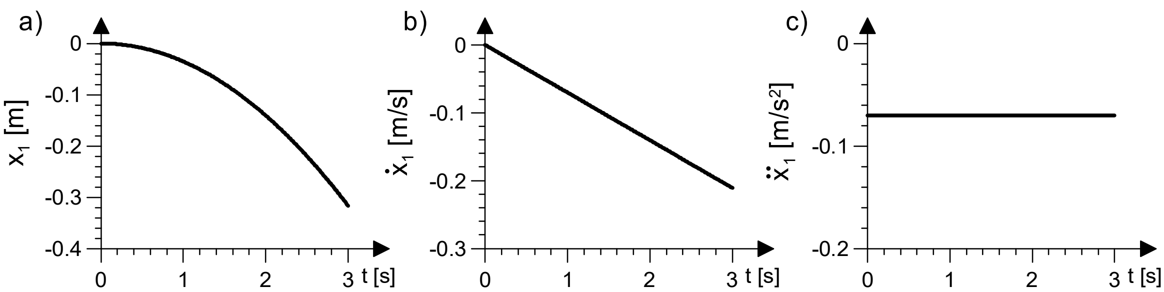
$$x_2 = \left(1 - \frac{Q_2}{Q_1 + Q_2} \right) s \cos\alpha + \left(v_{10} + \frac{Q_2 \dot{s}_0 \cos\alpha}{Q_1 + Q_2} \right) t + x_{10} + \frac{Q_2 s_0 \cos\alpha}{Q_1 + Q_2} - b \tag{4.45}$$

$$\dot{x}_2 = \left(1 - \frac{Q_2}{Q_1 + Q_2} \right) \dot{s} \cos\alpha + v_{10} + \frac{Q_2 \dot{s}_0 \cos\alpha}{Q_1 + Q_2} \tag{4.46}$$

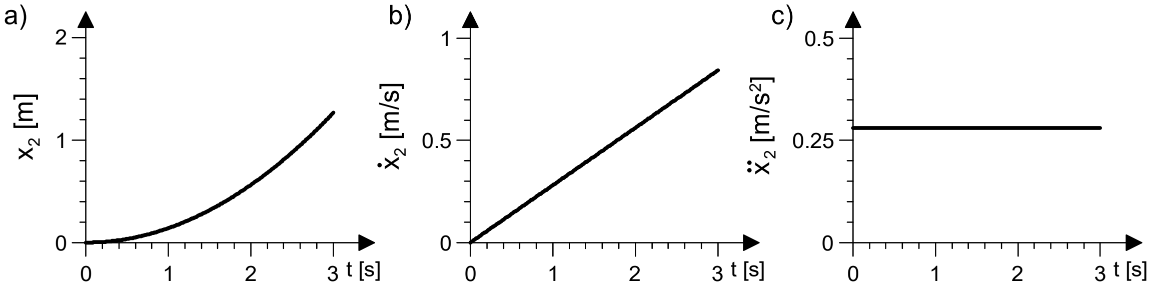
$$\ddot{x}_2 = \left(1 - \frac{Q_2}{Q_1 + Q_2} \right) \ddot{s} \cos\alpha \tag{4.47}$$

Ruch masy 1 i 2 na kierunku osi y jest znany i określony równaniami (4.31)-(4.33).

Dla danych liczbowych Q_1=40 [N], Q_1=10 [N], $s=0.2t^2$ [m], α=0.5 [rad], μ=0, g=10 [m/s^2], x_{10}=0 [m], v_{10}=0 [m/s] otrzymano rozwiązanie zadania prostego dynamiki przedstawione na rys. 4.3 i 4.4.



Rys. 4.3. Rozwiązanie zadania prostego dynamiki: a) przemieszczenie masy m_1, b) prędkość masy m_1, c) przyspieszenie masy m_1 na kierunku osi x



Rys. 4.4. Rozwiązanie zadania prostego dynamiki: a) przemieszczenie masy m_2, b) prędkość masy m_2, c) przyspieszenie masy m_2 na kierunku osi x

Wartość siły nacisku określona wzorem (4.36) dla przyjętych danych wynosi N=49.81 [N].

Zadanie 4.4. Dany jest mechanizm płaski pokazany na rys 4.5. Znane są ciężary brył $\overline{Q}_1$, $\overline{Q}_2$ i $\overline{Q}_3$. Znany jest kąt obrotu bryły 1. Na bryłę 3 działa siła $\overline{F}$. Założono, że w układzie nie występuje tarcie. Należy podać dynamiczne równania ruchu środka masy układu.

Dane:

$$\left.\begin{matrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{matrix}\right\} [N]$$

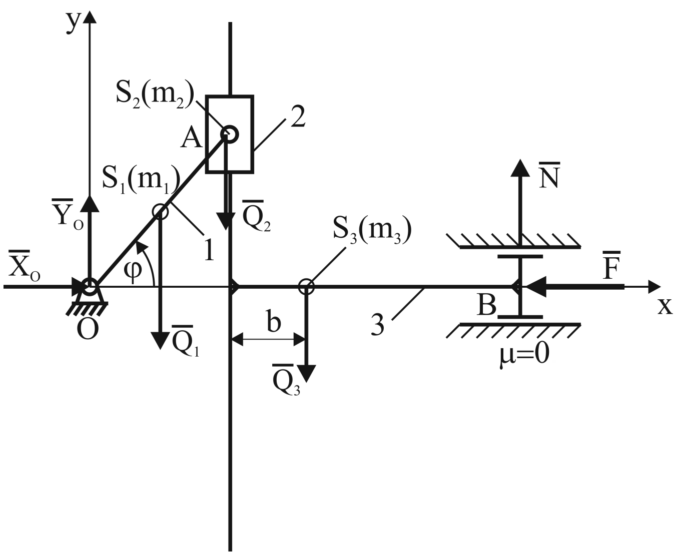
F [N]=const.

φ=ωt [rad], ω=const.

OA=r [m].

b [m]=const.

μ=0



Rys. 4.5

Rozwiązanie. Wprowadza się wszystkie siły zewnętrzne działające na układ. W rozpatrywanym przypadku będą to ciężary brył, reakcje podpory w punkcie O oraz reakcja normalna $\overline{N}$ w punkcie B. Nie wprowadza się reakcji pomiędzy bryłami 1 i 2 ponieważ są to siły wewnętrzne układu. Dynamiczne równania ruchu środka masy mają postać:

$$m\ddot{x}_S = m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 + m_3\ddot{x}_3 = X_O - F \tag{4.48}$$

$$m\ddot{y}_S = m_1\ddot{y}_1 + m_2\ddot{y}_2 + m_3\ddot{y}_3 = N+Y_O - Q_1 - Q_2 - Q_3 \tag{4.49}$$

Z geometrii układu wynika, że:

$$\begin{cases} x_1=\frac{r}{2}\cos(\omega t) \\ x_2=r\cos(\omega t) \\ x_3=r\cos(\omega t)+b \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1=\frac{r}{2}\sin(\omega t) \\ y_2=r\sin(\omega t) \\ y_3=0 \end{cases} \tag{4.50}$$

czyli

$$\begin{cases} \dot{x}_1=-\frac{r}{2}\omega\sin(\omega t) \\ \dot{x}_2=-r\omega\sin(\omega t) \\ \dot{x}_3=-r\omega\sin(\omega t) \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{y}_1=\frac{r}{2}\omega\cos(\omega t) \\ \dot{y}_2=r\omega\cos(\omega t) \\ \dot{y}_3=0 \end{cases} \tag{4.51}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1=-\frac{r}{2}\omega^2\cos(\omega t) \\ \ddot{x}_2=-r\omega^2\cos(\omega t) \\ \ddot{x}_3=-r\omega^2\cos(\omega t) \end{cases} \qquad \begin{cases} \ddot{y}_1=-\frac{r}{2}\omega^2\sin(\omega t) \\ \ddot{y}_2=-r\omega^2\sin(\omega t) \\ \ddot{y}_3=0 \end{cases} \tag{4.52}$$

i równania ruchu środka masy zapisano jako:

$$-\left(\frac{1}{2}m_1 + m_2 + m_3\right)r\omega^2\cos(\omega t) = X_O - F \tag{4.53}$$

$$-\left(\frac{1}{2}m_1 + m_2\right)r\omega^2\sin(\omega t) = N+Y_O - Q_1 - Q_2 - Q_3 \tag{4.54}$$

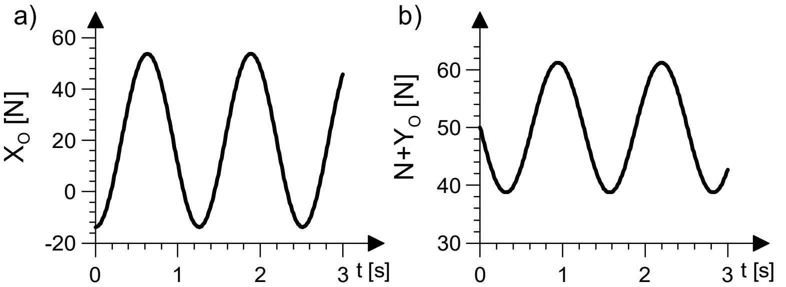
Z równania (4.53) wyznaczono wartość reakcji X_O:

$$X_O = F - \left(\frac{1}{2}Q_1 + Q_2 + Q_3\right)\frac{r\omega^2}{g}\cos(\omega t) \tag{4.55}$$

Natomiast z równania (4.54) można wyznaczyć jedynie sumę reakcji N i Y_O:

$$N+Y_O = Q_1 + Q_2 + Q_3 - \left(\frac{1}{2}Q_1 + Q_2\right)\frac{r\omega^2}{g}\sin(\omega t) \tag{4.56}$$

Dla danych liczbowych $Q_1=Q_2=10$ [N], $Q_3=30$ [N], F=20 [N], ω=5 [rad/s], r=0.3 [m], g=10 [m/s^2] otrzymano rozwiązanie przedstawione na rys. 4.6.



Rys. 4.6. Rozwiązanie: a) reakcja X_O, b) suma reakcji $N+Y_O$

Zadanie 4.5. Bryła 2 o ciężarze $\overline{Q}_2$ pozostaje na nieruchomej powierzchni poziomej. Do bryły 2 przymocowany jest niewyważony krążek 1 o ciężarze $\overline{Q}_1$ tak, że może obracać się wokół punktu A. Odległość środka masy krążka od punktu A wynosi e – to tzw. mimośród. Krążek obraca się wokół punktu A z prędkością kątową ω. Założono, że w układzie nie występuje tarcie. Należy podać dynamiczne równania ruchu środka masy i rozwiązać je.

Dane:

$\left.\begin{matrix} Q_1 \\ Q_2 \end{matrix}\right\}$ [N]

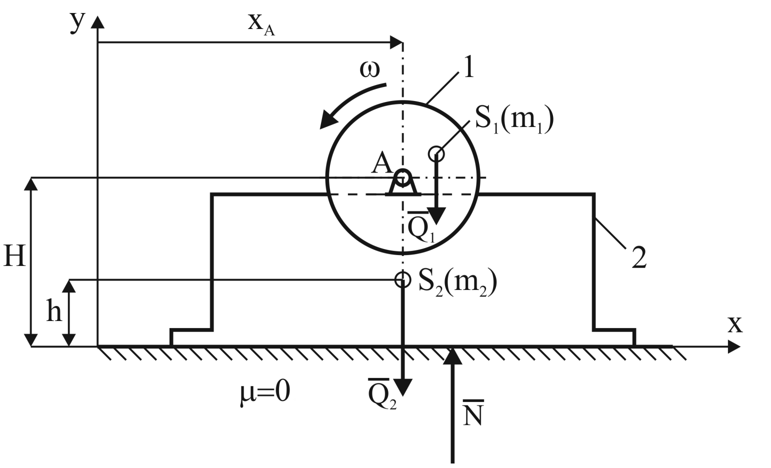
$AS_1=e$ [m]

$\mu=0$

ω [rad]=const.

warunki początkowe:

dla $t=t_0=0$ [s], $x_A=0$ [m], $\dot{x}_A=0$ [m/s]



Rys. 4.7

Rozwiązanie. Wprowadza się wszystkie siły zewnętrzne działające na układ. W rozpatrywanym przypadku będą to ciężary brył oraz reakcja normalna podłoża $\overline{N}$. Nie wprowadza się reakcji pomiędzy bryłami 1 i 2 ponieważ są to siły wewnętrzne układu. Dynamiczne równania ruchu środka masy mają postać:

$$m\ddot{x}_S = m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 = 0 \tag{4.57}$$

$$m\ddot{y}_S = m_1\ddot{y}_1 + m_2\ddot{y}_2 = N - Q_1 - Q_2 \tag{4.58}$$

Znając prędkość kątową krążka, można wyznaczyć kąt jego obrotu jako:

$$\varphi=\int_0^t \omega dt = \omega t \tag{4.59}$$

Z geometrii układu wynika, że:

$$\begin{cases} x_1=x_A+e\cos(\omega t) \\ x_2=x_A \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = H + e\sin(\omega t) \\ y_2 = h=\text{const} \end{cases} \tag{4.60}$$

gdzie x_A jest nieznane. Różniczkując równania (4.60) otrzymano:

$$\begin{cases}\dot{x}_1=\dot{x}_A-e\omega\sin(\omega t)\\ \dot{x}_2=\dot{x}_A\end{cases}\qquad \begin{cases}\dot{y}_1=e\omega\cos(\omega t)\\ \dot{y}_2=0\end{cases} \tag{4.61}$$

$$\begin{cases}\ddot{x}_1=\ddot{x}_A-e\omega^2\cos(\omega t)\\ \ddot{x}_2=\ddot{x}_A\end{cases}\qquad \begin{cases}\ddot{y}_1=-e\omega^2\sin(\omega t)\\ \ddot{y}_2=0\end{cases} \tag{4.62}$$

i równania ruchu środka masy zapisano jako:

$$m_1(\ddot{x}_A-e\omega^2\cos(\omega t))+m_2\ddot{x}_A=0 \tag{4.63}$$

$$-m_1e\omega^2\sin(\omega t)=N-Q_1-Q_2 \tag{4.64}$$

Z równania (4.64) wyznaczono wartość nacisku na podłoże:

$$N=Q_1+Q_2-\frac{Q_1}{g}e\omega^2\sin(\omega t) \tag{4.65}$$

Natomiast z równania (4.63) wyznaczono przyspieszenie punktu A:

$$\ddot{x}_A=\frac{Q_1e\omega^2\cos(\omega t)}{Q_1+Q_2} \tag{4.66}$$

Rozwiązując powyższe równanie można obliczyć prędkość i przemieszczenie punktu A:

$$\dot{x}_A=\frac{Q_1e\omega\sin(\omega t)}{Q_1+Q_2}+C_1 \tag{4.67}$$

$$x_A=-\frac{Q_1e\cos(\omega t)}{Q_1+Q_2}+C_1t+C_2 \tag{4.68}$$

Podstawiając do równań (4.67) i (4.68) warunki początkowe wyznaczono stałe całkowania:

$$C_1=0 \tag{4.69}$$

$$C_2=\frac{Q_1e}{Q_1+Q_2} \tag{4.70}$$

Znając ruch punktu A można określić ruch środków mas brył 1 i 2 z równań (4.60) – (4.62). Istotny jest fakt, że bryła 2 porusza się na kierunku osi x, co w praktyce w układach technicznych jest niedopuszczalne. Każde urządzenie musi być zabezpieczone przed przesuwaniem się. Ponadto w prezentowanym układzie zachodzi możliwość oderwania się bryły 2 od podłoża, co nastąpi wówczas gdy reakcja N będzie równa zero. Zatem reakcja ta musi spełniać warunek $N>0$ a stąd wynika, że prędkość kątowa ω nie może być dowolna, ale musi spełniać ograniczenie:

$$Q_1+Q_2-\frac{Q_1}{g}e\omega^2\sin(\omega t)>0 \tag{4.71}$$

Aby uniknąć konieczności spełniania tego ograniczenia układ należy przymocować do podłoża np. śrubami. Wówczas układ będzie unieruchomiony a śruby będą przenosić reakcje na kierunku pionowym y i poziomym x. Wówczas równanie ruchu środka masy na kierunku x będzie

$$m\ddot{x}_S=m_1\ddot{x}_1+m_2\ddot{x}_2=X \tag{4.72}$$

gdzie X to reakcja w śrubach. Wówczas punkt A będzie nieruchomy, więc

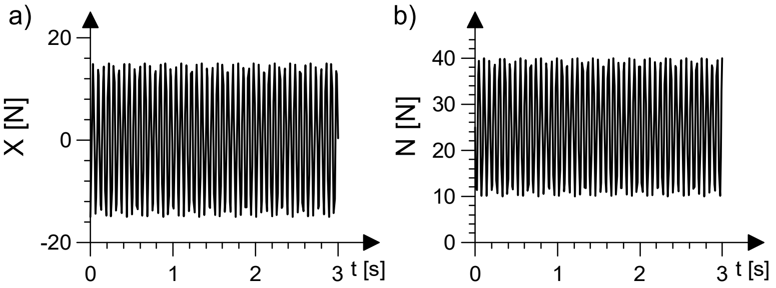
$$\begin{cases}\ddot{x}_1=-e\omega^2\cos(\omega t)\\ \ddot{x}_2=0\end{cases} \tag{4.73}$$

Zatem reakcja X to:

$$X=-\frac{Q_1}{g}e\omega^2\cos(\omega t) \tag{4.74}$$

Reakcja ta jest zmienna w czasie i zależy od kwadratu prędkości kątowej.

Dla danych liczbowych Q_1=5 [N], Q_2=20 [N], e=0.003 [m], μ=0 [-], g=10 [m/s^2], ω=100 [rad/s]≈955 [obr./min] otrzymano przebiegi sił reakcji X i N przedstawione na rys. 4.8.

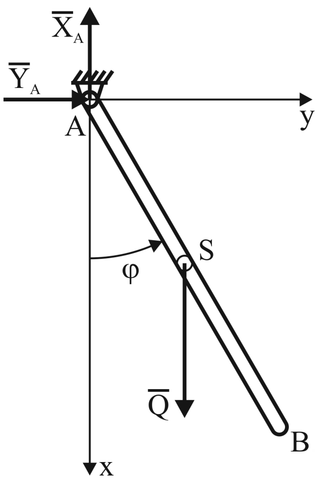


Rys. 4.8. Rozwiązanie: a) wartość reakcji X, b) wartość reakcji N

5. DYNAMIKA RUCHU OBROTOWEGO

Zadanie 5.1. Bryła w postaci pręta o ciężarze $\overline{Q}$ zamocowanego przegubowo w punkcie A stanowi wahadło fizyczne. Zostało ono wytrącone z położenia równowagi statycznej. Podać równanie ruchu wahadła i jego rozwiązanie.

Dane:
Q [N]
AB=l [m]
AS=$\frac{l}{2}$ [m]
warunki początkowe:
dla $t=t_0=0$ [s], $\varphi=\varphi_0$, $\dot{\varphi}=0$



Rys. 5.1

Rozwiązanie. Wprowadzono wszystkie siły działające na bryłę. W rozpatrywanym przypadku będzie to ciężar bryły oraz reakcje podpory w punkcie A. Dynamiczne równanie ruchu pręta ma postać:

$$I_A\ddot{\varphi} = -Q\frac{l}{2}\sin\varphi \tag{5.1}$$

Jest to równanie opisujące ruch obrotowy pręta względem punktu A. Jego rozwiązanie wymaga przyjęcia założenia, że kąt φ jest mały tzn. w praktyce $|\varphi|<0.3$ [rad]. Wówczas można skorzystać z przybliżenia $\sin\varphi\approx\varphi$ i napisać równanie ruchu w postaci:

$$I_A\ddot{\varphi}+Q\frac{l}{2}\varphi = 0 \tag{5.2}$$

Wygodnie jest zapisać równanie (5.2) w postaci:

$$\ddot{\varphi}+\omega^2\varphi = 0 \tag{5.3}$$

gdzie

$$\omega^2=Q\frac{l}{2I_A} \tag{5.4}$$

Rozwiązanie równania różniczkowego (5.3) ma następującą postać:

$$\varphi = C_1\cos(\omega t)+C_2\sin(\omega t) \tag{5.5}$$

Różniczkując równanie (5.5) otrzymano:

$$\dot{\varphi} = -C_1\omega\sin(\omega t)+C_2\omega\cos(\omega t) \tag{5.6}$$

Podstawiając do równań (5.5) i (5.6) warunki początkowe wyznaczono stałe C_1 i C_2 jako:

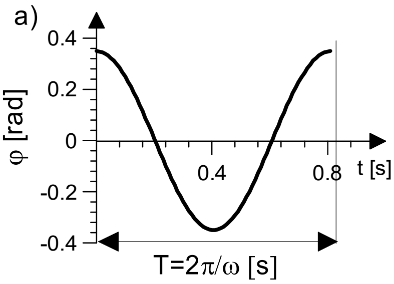
$$\begin{cases} C_1 = \varphi_0 \\ C_2 = 0 \end{cases} \tag{5.7}$$

Ostatecznie równanie (5.5) przyjmie następującą postać

$$\varphi = \varphi_0\cos(\omega t) \tag{5.8}$$

Równanie to opisuje ruch harmonicznie zmienny.

Dla danych liczbowych Q=10 [N], l=0.25 [m], g=10 [m/s^2], φ_0=0.3 [rad] otrzymano przebieg rozwiązania (5.8) przedstawiony na rys. 5.2.



Rys. 5.2. Przebieg kąta obrotu pręta φ

Okres ruchu jest związany z częstością ω następującym wzorem:

$$T=\frac{2\pi}{\omega} \rightarrow \omega=\frac{2\pi}{T} \tag{5.9}$$

i z zależności (5.4) można wyznaczyć masowy moment bezwładności bryły względem środka obrotu jako:

$$I_A=\frac{QlT^2}{2(2\pi)^2} \tag{5.10}$$

Powyższe podejście wykorzystuje się do doświadczalnego wyznaczania masowych momentów bezwładności brył o skomplikowanych kształtach. Wystarczy z bryły zrobić wahadło fizyczne, wytrącić je z położenia równowagi i zmierzyć okres ruchu T [s].

Zadanie 5.2. Krążek obraca się w płaszczyźnie xy względem osi przechodzącej przez punkt O pod wpływem przyłożonego do niego momentu napędzającego M. Podać równanie ruchu krążka i jego rozwiązanie.

Dane:

Q [N]

r [m]

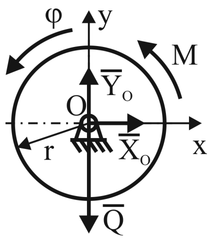
$M=M_0\sin(\omega t)$

M_0 [Nm]=const.

ω [rad/s]=const.

warunki początkowe:

dla $t=t_0=0$ [s], $\varphi=0$, $\dot{\varphi}=0$



Rys. 5.3

Rozwiązanie. Wprowadzono wszystkie siły i momenty działające na bryłę. W rozpatrywanym przypadku będzie to ciężar krążka, reakcje podpory w punkcie O oraz moment napędowy M. Dynamiczne równanie ruchu krążka ma postać:

$$I_O\ddot{\varphi} = M \tag{5.11}$$

gdzie masowy moment bezwładności krążka względem punktu O to:

$$I_O = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2}\frac{Q}{g}r^2 \tag{5.12}$$

Równanie (5.11) można zapisać w postaci:

$$\ddot{\varphi} = \frac{M_0}{I_O}\sin(\omega t) \tag{5.13}$$

Całkując dwukrotnie równanie (5.13) otrzymano:

$$\dot{\varphi} = -\frac{M_0}{I_O\omega}\cos(\omega t)+C_1 \tag{5.14}$$

$$\varphi = -\frac{M_0}{I_O\omega^2}\sin(\omega t)+C_1 t + C_2 \tag{5.15}$$

Podstawiając do równań (5.14) i (5.15) zerowe warunki początkowe wyznaczono stałe C_1 i C_2 jako:

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{M_0}{I_O\omega} \\ C_2 = 0 \end{cases} \tag{5.16}$$

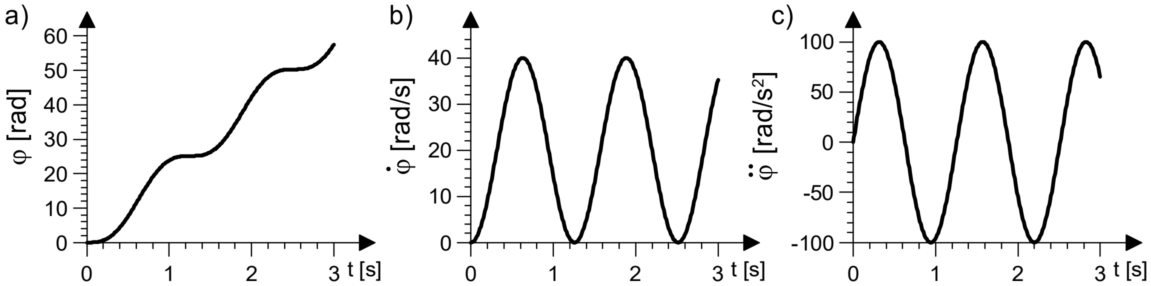
Ostatecznie kinematyczne parametry ruchu krążka to

$$\varphi = \frac{M_0}{I_O\omega^2}\left[\omega t - \sin(\omega t)\right] \tag{5.17}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{M_0}{I_O\omega}\left[1 - \cos(\omega t)\right] \tag{5.18}$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{M_0}{I_O}\sin(\omega t) \tag{5.19}$$

Dla danych liczbowych Q=20 [N], r=0.1 [m], M_0=1 [Nm], ω=5 [rad/s], g=10 [m/s^2] otrzymano rozwiązanie zadania prostego dynamiki przedstawione na rys. 5.4.



Rys. 5.4. Rozwiązanie zadania prostego dynamiki: a) kąt obrotu krążka, b) prędkość kątowa krążka, c) przyspieszenie kątowe krążka

Zadanie 5.3. Krążek o masie m_1 i promieniu R obraca się wokół osi z. Wzdłuż cięciwy AB porusza się punkt M o masie m_2. Wiadomo, że gdy punkt M jest w położeniu I to jego prędkość względem krążka wynosi 0, natomiast krążek obraca się z prędkością kątową ω_I. Ile będzie wynosić prędkość kątowa krążka, gdy punkt M zajmie położenie II i będzie posiadał prędkość względem krążka równą u.

Dane :

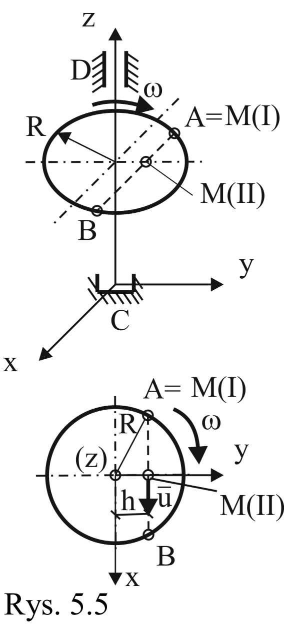
$\left.\begin{matrix} m_1 \\ m_2 \end{matrix}\right\} [\mathrm{kg}]$

R [m]

h [m]

ω_I [rad/s]

u [m/s]



Rys. 5.5

Rozwiązanie. Ponieważ siły zewnętrzne działające na układ to ciężary brył działające równolegle do osi z, to te siły dają względem osi z moment równy

$$\sum_{i=1}^{n} M_Z\left(\overline{P}_i\right) = 0 \tag{5.20}$$

Wynika z tego, że kręt układu względem osi z jest stały, a to oznacza, że:

$$K_Z^{I} = K_Z^{II} = \text{const.} \tag{5.21}$$

Kręt układu w położeniu I to suma krętu krążka i krętu masy m_2 (kręt to moment pędu masy względem osi z):

$$K_Z^{I} = I_Z\omega_I + m_2 v_M^{I} R \tag{5.22}$$

Masowy moment bezwładności krążka względem osi z wynosi:

$$I_Z = \frac{1}{2} m_1 R^2 \tag{5.23}$$

Natomiast prędkość punktu M w położeniu I wynosi:

$$v_M^{I} = v_A = \omega_I R \tag{5.24}$$

Ostatecznie kręt układu w położeniu I wyrażono jako:

$$K_Z^{I} = \left(I_Z + m_2 R^2\right)\omega_I \tag{5.25}$$

Kręt układu w położeniu II to suma krętu krążka poruszającego się z prędkością kątową ω_{II} i krętu masy m_2 poruszającej się względem krążka wzdłuż cięciwy z prędkością u:

$$K_Z^{II} = I_Z\omega_{II} + m_2 v_M^{II} h \tag{5.26}$$

Prędkość punktu M w położeniu II wynosi:

$$v_M^{II} = \omega_{II} h + u \tag{5.27}$$

Zatem kręt układu w położeniu II wyrażono jako:

$$K_Z^{II} = I_Z\omega_{II} + m_2\left(\omega_{II} h + u\right)h \tag{5.28}$$

i następnie:

$$K_Z^{II} = \left(I_Z + m_2 h^2\right)\omega_{II} + m_2 u h \tag{5.29}$$

Na podstawie zależności (5.21) można zapisać:

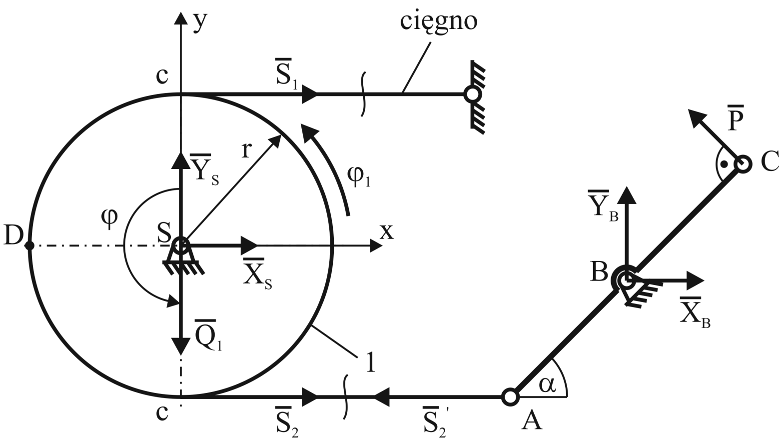
$$\left(I_Z + m_2 R^2\right)\omega_I = \left(I_Z + m_2 h^2\right)\omega_{II} + m_2 u h \tag{5.30}$$

Z powyższego równania wynika prędkość kątowa krążka w położeniu II:

$$\omega_{II} = \frac{\left(I_Z + m_2 R^2\right)\omega_I - m_2 u h}{I_Z + m_2 h^2} \tag{5.31}$$

Zadanie 5.4. Hamulec taśmowy. Krążek hamulca taśmowego 1 obraca się wokół nieruchomej osi i w chwili, gdy jego prędkość kątowa wynosi ω_0 rozpoczyna się jego hamowanie, bo do dźwigni 2 przyłożono stałą siłę $\overline{P}$, która napina cięgno (taśmę) c-c opasującą krążek. Określić dynamiczne równanie ruchu obrotowego krążka i rozwiązać to równanie tak, aby wyznaczyć czas t_1 [s], po którym krążek zatrzyma się.

Dane:
Q_1 [N]
P [N]
ω_0 [rad/s]
AB=a [m]
BC=b [m]
α [rad]
μ
r [m]
$i_D^{(1)} = i = \sqrt{\frac{3}{2}} r$ [m]



Rys. 5.6

Rozwiązanie. Siły zewnętrzne działające na krążek to:

$\overline{Q}_1$ - ciężar krążka,

$\left.\begin{matrix}\overline{X}_S\\ \overline{Y}_S\end{matrix}\right\}$ - rekcje podpory stałej na płaszczyźnie,

$\left.\begin{matrix}\overline{S}_1\\ \overline{S}_2\end{matrix}\right\}$ - siły reakcji cięgna opasującego krążek.

Zakładamy, że krążek 1 jest wyważony statycznie, tzn. że jego środek masy S leży na osi obrotu. Dynamiczne równanie ruchu krążka to:

$$I_S\ddot{\varphi}_1 = \left(S_2 - S_1\right)r \tag{5.32}$$

Ponieważ zetknięcie cięgna z krążkiem to współpraca powierzchni chropowatych, dla których współczynnik tarcia suchego to μ, a cięgno opasuje krążek, gdzie kąt opasania $\varphi=180^o=\pi$ [rad], to zależność między siłami napięcia cięgna wynika ze wzoru Eulera, czyli:

$$S_1 = S_2 e^{\mu\varphi} \tag{5.33}$$

Napięcie S_1 jest większe od S_2 co wynika z równania (5.32), bo aby krążek zatrzymał się, jego przyspieszenie kątowe $\varepsilon_1=\ddot{\varphi}_1$ musi być ujemne, czyli $S_1> S_2$. Wprowadzając zależność (5.33) do (5.32), mamy równanie:

$$I_S\ddot{\varphi}_1 = S_2\left(1 - e^{\mu\varphi}\right)r \tag{5.34}$$

Masowy moment bezwładności krążka to:

$$I_S = I_D - m_1 r^2 \tag{5.35}$$

co wynika z twierdzenia Steinera, gdzie $I_D = m_1 i^2 = \frac{Q_1}{g} i^2 \left[\text{kgm}^2\right]$, czyli

$$I_S = \frac{Q_1}{g}i^2 - \frac{Q_1}{g}r^2 = \frac{Q_1}{g}\left(i^2 - r^2\right) = \frac{Q_1}{2g}r^2 \left[\text{kgm}^2\right].$$

Wartość siły napięcia cięgna S_2 określimy z równania równowagi statycznej dźwigni 2. Dźwignia jest w równowadze statycznej, a siły na nią działające to $\overline{P}$, $\overline{S}_2'$, $\overline{X}_B$, $\overline{Y}_B$. Załóżmy np., że jej ciężar własny jest mały, czyli przyjmijmy, że $Q_2=0$. Wykorzystujemy równanie równowagi statycznej dla dźwigni 2, czyli:

$$\sum_{i=1}^{n} M_B\left(\overline{P}_i\right) = Pb - S_2' a\sin\alpha = 0 \tag{5.36}$$

Stąd

$$S_2' = P\frac{b}{a\sin\alpha} \tag{5.37}$$

Ponieważ wiadomo (co wynika z równowagi cięgna c-d), że:

$$S_2 = S_2' = P\frac{b}{a\sin\alpha} \tag{5.38}$$

równanie (5.34) będzie

$$I_S\ddot{\varphi}_1 = -\frac{br}{a\sin\alpha}P\left(e^{\mu\varphi}-1\right) = -\lambda P \tag{5.39}$$

gdzie $\lambda = \frac{br}{a\sin\alpha}\left(e^{\mu\varphi}-1\right) = \text{const}$. Całkując obustronnie równanie (5.39) mamy, że

$$I_S\dot{\varphi}_1 = -\lambda Pt + C_1 \tag{5.40}$$

$$I_S\varphi_1 = -\frac{1}{2}\lambda Pt^2 + C_1t + C_2 \tag{5.41}$$

Stałe całkowania C_1 i C_2 określimy z równań (5.40) i (5.41), jeżeli do tych równań wprowadzimy warunki początkowe, czyli dla $t=t_0=0$ [s], $\varphi_1=0$, $\dot{\varphi}_1=\omega_0$. Wówczas $C_1=I_S\omega_0$, $C_2=0$ i ostatecznie parametry kątowe ruchu hamowanego krążka to

$$\varepsilon_1 = \ddot{\varphi}_1 = -\frac{\lambda}{I_S}P \quad \text{to przyspieszenie kątowe krążka} \tag{5.42}$$

$$\omega_1 = \dot{\varphi}_1 = -\frac{\lambda}{I_S}Pt + \omega_0 \quad \text{to prędkość kątowa krążka} \tag{5.43}$$

$$\varphi_1 = -\frac{\lambda}{2I_S}Pt^2 + \omega_0 t \quad \text{to kąt obrotu krążka} \tag{5.44}$$

Hamowany krążek zatrzyma się po czasie $t=t_1$ [s] gdy jego prędkość kątowa będzie zerem, czyli z równania (5.43) mamy, że

$$0 = -\frac{\lambda}{I_S}Pt_1 + \omega_0 \tag{5.45}$$

Stąd określimy czas hamowania t_1, czyli

$$t_1 = \frac{I_S}{P\lambda}\omega_0\,[\mathrm{s}] \tag{5.46}$$

Z równania (5.46) wynika, że im wartość siły $\overline{P}$ będzie większa, to czas hamowania t_1 będzie mniejszy. Jeżeli $P\lambda=0$ – tak będzie np. gdy $\mu=0$ – to wówczas $t_1=\infty$, czyli krążek nie zatrzyma się. Jeżeli będzie nas interesować ile pełnych obrotów wykona krążek w czasie hamowania, to z równania (5.44), wprowadzając za $t=t_1$, określimy kąt obrotu φ_1 [rad] i wówczas ilość pełnych obrotów krążka będzie określona jako:

$$n = \frac{\varphi_1}{2\pi} = \frac{I_S}{4P\lambda\pi}\omega_0^2 \tag{5.47}$$

Jeżeli przyjmiemy np., że $Q_1=2$ [N], $a=0.1$ [m], $b=0.2$ [m], $r=0.2$ [m], $\varphi=\pi$ [rad], $\alpha=\pi/6$ [rad], $\omega_0=10\pi$ [rad/s], to dla różnych wartości współczynnika tarcia suchego μ oraz siły P, czas hamowania oraz liczba obrotów krążka będą różne, co podano w poniższej tabeli.

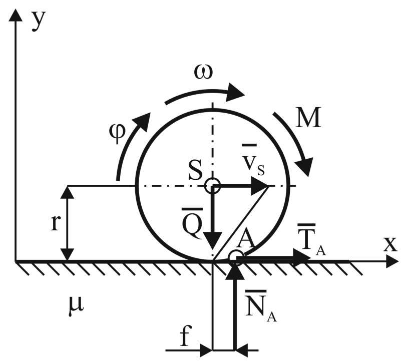
μ	P [N]	t_1 [s]	n
0.2	2	0.09	0.22
0.5	2	0.02	0.05
0.2	8	0.022	0.06
0.5	8	0.005	0.01

Powyżej rozważany przykład to rozwiązanie tzw. zadania prostego dynamiki. Można również rozwiązać tzw. zadanie odwrotne dynamiki, wówczas narzucamy kinematykę układu (ω_0) oraz t_1, a szukamy wartości siły P.

6. DYNAMIKA RUCHU PŁASKIEGO

Zadanie 6.1. Krążek o ciężarze $\overline{Q}$ i promieniu r toczy się bez poślizgu po chropowatej i odkształcalnej powierzchni poziomej pod wpływem przyłożonej pary sił M. Podać równania ruchu krążka i określić dopuszczalne wartości M.

Dane:
Q [N]
r [m]
f [m]
μ
M=const.
zerowe warunki początkowe



Rys. 6.1

Rozwiązanie. Wprowadza się wszystkie siły i momenty sił działające na krążek. W rozpatrywanym przypadku będzie to moment M, ciężar bryły $\overline{Q}$ oraz reakcje podłoża w punkcie A: reakcja normalna i styczna (siła tarcia). Zakłada się toczenie krążka bez poślizgu, z czego wynika, że prędkość środka masy S to:

$$v_S = r\omega \tag{6.1}$$

lub w inne formie:

$$\dot{x}_S = r\dot{\varphi} \tag{6.2}$$

Różniczkując równanie (6.2) otrzymano przyspieszenie środka masy:

$$\ddot{x}_S = r\ddot{\varphi} \tag{6.3}$$

Dynamiczne równania ruchu krążka to:

$$m\ddot{x}_S = T_A \tag{6.4}$$

$$m\ddot{y}_S = N_A - Q \tag{6.5}$$

$$I_S\ddot{\varphi} = M - T_A r - N_A f \tag{6.6}$$

Krążek nie może odrywać się od podłoża, zatem

$$y_S = r,\ \dot{y}_S = 0,\ \ddot{y}_S = 0 \tag{6.7}$$

czyli z równania (6.5) można wyznaczyć siłę nacisku:

$$N_A = Q \tag{6.8}$$

Należy teraz rozwiązać układ równań (6.3, 6.4, 6.6), w których niewiadomymi są φ, x_S, T_A. Siła tarcia jest tu wielkością nieznaną i nie należy tu wprowadzać tarcia rozwiniętego. Układ równań (6.3, 6.4, 6.6) należy rozwiązać w następującej kolejności. Równanie kinematyki (6.3) należy wprowadzić do równania (6.6):

$$I_S \frac{\ddot{x}_S}{r} = M - T_A r - N_A f \tag{6.9}$$

Na podstawie równania (6.9) wykorzystując równanie (6.8) siłę tarcia zapisano jako

$$T_A = \frac{M}{r} - I_S \frac{\ddot{x}_S}{r^2} - Q\frac{f}{r} \tag{6.10}$$

Podstawiając powyższe równanie do równania (6.4) otrzymano

$$m\ddot{x}_S = \frac{M}{r} - I_S \frac{\ddot{x}_S}{r^2} - Q\frac{f}{r} \tag{6.11}$$

i następnie wykorzystując wzór określający masowy moment bezwładności krążka względem jego środka masy:

$$I_S = \frac{1}{2} m r^2 = \frac{Q}{2g} r^2 \tag{6.12}$$

przyspieszenie środka masy wyznaczono jako

$$\ddot{x}_S = \frac{M - Qf}{3Qr} 2g \tag{6.13}$$

Całkując dwukrotnie powyższe równanie wyznaczono prędkość i przemieszczenie środka masy krążka jako:

$$\dot{x}_S = \frac{M - Qf}{3Qr} 2gt + C_1 \tag{6.14}$$

$$x_S = \frac{M - Qf}{3Qr} gt^2 + C_1 t + C_2 \tag{6.15}$$

Przyjmując zerowe warunki początkowe, z równań (6.14) i (6.15) wyznaczono stałe całkowania:

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{cases} \tag{6.16}$$

Ostatecznie parametry liniowe ruchu krążka to

$$\ddot{x}_S = \frac{M - Qf}{3Qr} 2g \tag{6.17}$$

$$\dot{x}_S = \frac{M - Qf}{3Qr} 2gt \tag{6.18}$$

$$x_S = \frac{M - Qf}{3Qr} gt^2 \tag{6.19}$$

Aby odbywał się założony ruch musi być spełniony warunek, że prędkość środka masy krążka jest większa od zera $\dot{x}_S > 0$, co prowadzi do warunku:

$$M - Qf > 0 \tag{6.20}$$

Stąd wynika dolne ograniczenie momentu M w następującej postaci:

$$M > Qf \tag{6.21}$$

Wróćmy teraz do równania (6.10), z którego należy wyznaczyć siłę tarcia. Wynosi ona:

$$T_A = \frac{M}{r} - \frac{M - Qf}{3r} - Q\frac{f}{r} \tag{6.22}$$

i następnie:

$$T_A = \frac{2}{3}\frac{M - Qf}{r} \tag{6.23}$$

Wiadomo ze statyki, że siła tarcia nie może być większa od tarcia rozwiniętego, czyli:

$$T_A \le \mu N_A = \mu Q \tag{6.24}$$

Stąd powstaje warunek

$$\frac{2}{3}\frac{M - Qf}{r} \le \mu Q \tag{6.25}$$

z którego wynika górne ograniczenie momentu M w następującej postaci:

$$M \le Qr\left(\frac{3}{2}\mu + \frac{f}{r}\right) \tag{6.26}$$

Ostatecznie należy stwierdzić, że założony ruch krążka wystąpi wówczas, gdy przyłożony moment M spełnia następujący warunek:

$$Qf < M \le Qr\left(\frac{3}{2}\mu + \frac{f}{r}\right) \tag{6.27}$$

Taki przypadek odpowiada ruchowi koła napędzającego samochód.

Zadanie 6.2. Krążek o ciężarze $\overline{Q}$ i promieniu r toczy się bez poślizgu po chropowatej i odkształcalnej powierzchni poziomej pod wpływem przyłożonej siły $\overline{G}$. Podać równania ruchu krążka i określić dopuszczalne wartości $\overline{G}$.

Dane:

Q [N]

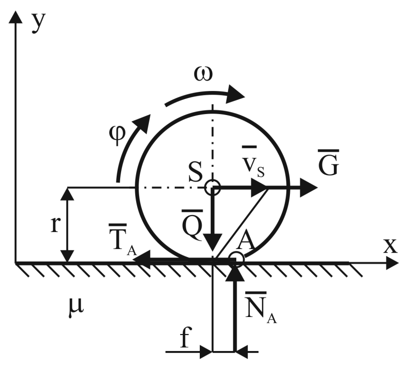
r [m]

f [m]

μ

G=const.

zerowe warunki początkowe



Rys. 6.2

Rozwiązanie. Wprowadza się wszystkie siły działające na krążek. W rozpatrywanym przypadku będzie to ciężar bryły $\overline{Q}$, siła $\overline{G}$ powodująca ruch oraz reakcje podłoża w punkcie A: reakcja normalna i styczna (siła tarcia). Zakłada się toczenie krążka bez poślizgu, z czego wynika, że prędkość środka masy S to:

$$v_S = r\omega \tag{6.28}$$

lub w inne formie:

$$\dot{x}_S = r\dot{\varphi} \tag{6.29}$$

Różniczkując równanie (6.29) otrzymano przyspieszenie środka masy:

$$\ddot{x}_S = r\ddot{\varphi} \qquad (6.30)$$

Dynamiczne równania ruchu krążka to:

$$m\ddot{x}_S = G - T_A \qquad (6.31)$$

$$m\ddot{y}_S = N_A - Q \qquad (6.32)$$

$$I_S\ddot{\varphi} = T_A r - N_A f \qquad (6.33)$$

Krążek nie może odrywać się od podłoża, zatem

$$y_S = r,\ \dot{y}_S = 0,\ \ddot{y}_S = 0 \qquad (6.34)$$

czyli z równania (6.32) można wyznaczyć siłę nacisku:

$$N_A = Q \qquad (6.35)$$

Należy teraz rozwiązać układ równań (6.30, 6.31, 6.33), w których niewiadomymi są φ, x_S, T_A. Siła tarcia jest tu wielkością nieznaną i nie należy tu wprowadzać tarcia rozwiniętego. Układ równań (6.30, 6.31, 6.33) należy rozwiązać w następującej kolejności. Równanie kinematyki (6.30) należy wprowadzić do równania (6.33):

$$I_S \frac{\ddot{x}_S}{r} = T_A r - N_A f \qquad (6.36)$$

Na podstawie równania (6.36) wykorzystując równanie (6.35) siłę tarcia zapisano jako

$$T_A = I_S \frac{\ddot{x}_S}{r^2} + Q\frac{f}{r} \qquad (6.37)$$

Podstawiając powyższe równanie do równania (6.31) otrzymano

$$m\ddot{x}_S = G - I_S \frac{\ddot{x}_S}{r^2} - Q\frac{f}{r} \qquad (6.38)$$

i następnie wykorzystując wzór określający masowy moment bezwładności krążka względem jego środka masy:

$$I_S = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{Q}{2g}r^2 \qquad (6.39)$$

przyspieszenie środka masy wyznaczono jako

$$\ddot{x}_S = \frac{Gr - Qf}{3Qr}2g \qquad (6.40)$$

Całkując dwukrotnie powyższe równanie wyznaczono prędkość i przemieszczenie środka masy krążka jako:

$$\dot{x}_S = \frac{Gr - Qf}{3Qr}2gt + C_1 \qquad (6.41)$$

$$x_S = \frac{Gr - Qf}{3Qr}gt^2 + C_1 t + C_2 \qquad (6.42)$$

Przyjmując zerowe warunki początkowe, z równań (6.41) i (6.42) wyznaczono stałe całkowania:

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{cases} \qquad (6.43)$$

Ostatecznie parametry liniowe ruchu krążka to

$$\ddot{x}_S = \frac{Gr - Qf}{3Qr}2g \qquad (6.44)$$

$$\dot{x}_S = \frac{Gr - Qf}{3Qr}2gt \qquad (6.45)$$

$$x_S = \frac{Gr - Qf}{3Qr} g t^2 \tag{6.46}$$

Aby odbywał się założony ruch musi być spełniony warunek, że prędkość środka masy krążka jest większa od zera $\dot{x}_S > 0$, co prowadzi do warunku:

$$Gr - Qf > 0 \tag{6.47}$$

Stąd wynika dolne ograniczenie siły G w następującej postaci:

$$G > Q\frac{f}{r} \tag{6.48}$$

Wróćmy teraz do równania (6.37), z którego należy wyznaczyć siłę tarcia. Wynosi ona:

$$T_A = \frac{Gr - Qf}{3r} + Q\frac{f}{r} \tag{6.49}$$

i następnie:

$$T_A = \frac{Gr + 2Qf}{3r} \tag{6.50}$$

Wiadomo ze statyki, że siła tarcia nie może być większa od tarcia rozwiniętego, czyli:

$$T_A \le \mu N_A = \mu Q \tag{6.51}$$

Stąd powstaje warunek

$$\frac{Gr + 2Qf}{3r} \le \mu Q \tag{6.52}$$

z którego wynika górne ograniczenie siły G w następującej postaci:

$$G \le Q\left(3\mu - 2\frac{f}{r}\right) \tag{6.53}$$

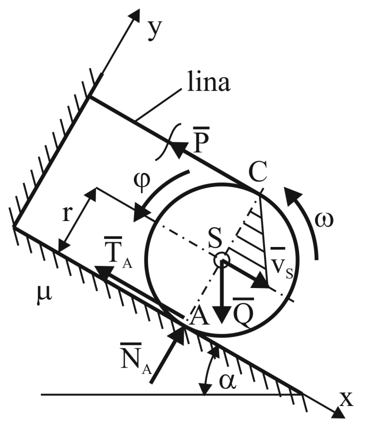
Ostatecznie należy stwierdzić, że założony ruch krążka wystąpi wówczas, gdy przyłożona siła G spełnia następujący warunek:

$$Q\frac{f}{r} < G \le Q\left(3\mu - 2\frac{f}{r}\right) \tag{6.54}$$

Taki przypadek odpowiada ruchowi koła ciągnionego w samochodzie.

Zadanie 6.3. Krążek o ciężarze $\overline{Q}$ i promieniu r odwija się z liny i jednocześnie ześlizguje się z chropowatej równi pochylonej do poziomu pod kątem α. Podać równania ruchu krążka i rozwiązać je.

Dane:
Q [N]
r [m]
f [m]
μ
zerowe warunki początkowe



Rys. 6.3

Rozwiązanie. Wprowadza się wszystkie siły działające na krążek. W rozpatrywanym przypadku będzie to ciężar bryły $\overline{Q}$, siła w linie $\overline{P}$ oraz reakcje podłoża w punkcie A: reakcja normalna i styczna (siła tarcia). Zakłada się, że pod wpływem ciężaru własnego krążek odwija się z liny i ślizgając się przemieszcza się po równi. Zatem punkt C to chwilowy środek obrotu krążka, z czego wynika, że prędkość środka masy S to:

$$v_S = r\omega \tag{6.55}$$

lub w inne formie:

$$\dot{x}_S = r\dot{\varphi} \tag{6.56}$$

Różniczkując równanie (6.56) otrzymano przyspieszenie środka masy:

$$\ddot{x}_S = r\ddot{\varphi} \tag{6.57}$$

Dynamiczne równania ruchu krążka to:

$$m\ddot{x}_S = Q\sin\alpha - P - T_A \tag{6.58}$$

$$m\ddot{y}_S = N_A - Q\cos\alpha \tag{6.59}$$

$$I_S\ddot{\varphi} = Pr - T_A r \tag{6.60}$$

Ze względu na ślizganie się krążka po równi należy wprowadzić tarcie rozwinięte, czyli siła tarcia to:

$$T_A = \mu N_A \tag{6.61}$$

Zauważamy, że krążek nie może odrywać się od podłoża, zatem

$$y_S = r,\ \dot{y}_S = 0,\ \ddot{y}_S = 0 \tag{6.62}$$

czyli z równania (6.59) można wyznaczyć siłę nacisku:

$$N_A = Q\cos\alpha \tag{6.63}$$

a następnie z równania (6.61) siłę tarcia:

$$T_A = \mu Q\cos\alpha \tag{6.64}$$

Po podstawieniu siły tarcia do równań (6.58) i (6.60), tworzą one wraz z równaniem kinematyki (6.57) następujący układ trzech równań,

$$\ddot{x}_S = r\ddot{\varphi} \tag{6.65}$$

$$m\ddot{x}_S = Q\sin\alpha - P - \mu Q\cos\alpha \tag{6.66}$$

$$I_S\ddot{\varphi} = Pr - \mu Qr\cos\alpha \tag{6.67}$$

w których niewiadomymi są φ, x_S, P. Podany układ równań można rozwiązać np. w następujący sposób. Wykorzystując wzór określający masowy moment bezwładności krążka względem jego środka masy:

$$I_S = \frac{1}{2} m r^2 = \frac{Q}{2g} r^2 \tag{6.68}$$

i wprowadzając równanie kinematyki (6.65) do równania (6.67) otrzymano:

$$\frac{Q}{2g} r\ddot{x}_S = Pr - \mu Qr\cos\alpha \tag{6.69}$$

Z powyższego równania wyznaczono siłę P jako

$$P = \frac{Q}{2g}\ddot{x}_S + \mu Q\cos\alpha \tag{6.70}$$

i podstawiono do równania (6.66). Otrzymano równanie:

$$m\ddot{x}_S = Q\sin\alpha - \frac{Q}{2g}\ddot{x}_S - 2\mu Q\cos\alpha \tag{6.71}$$

z którego przyspieszenie środka masy wyznaczono jako

$$\ddot{x}_S = \frac{2}{3}\left(\sin\alpha - 2\mu\cos\alpha\right) g \tag{6.72}$$

Całkując dwukrotnie powyższe równanie wyznaczono prędkość i przemieszczenie środka masy krążka jako:

$$\dot{x}_S = \frac{2}{3}\left(\sin\alpha - 2\mu\cos\alpha\right) gt + C_1 \tag{6.73}$$

$$x_S = \frac{1}{3}\left(\sin\alpha - 2\mu\cos\alpha\right) gt^2 + C_1 t + C_2 \tag{6.74}$$

Przyjmując zerowe warunki początkowe, z (6.73) i (6.74) wyznaczono stałe całkowania:

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{cases} \tag{6.75}$$

Ostatecznie parametry liniowe ruchu krążka to:

$$\ddot{x}_S = \frac{2}{3}\left(\sin\alpha - 2\mu\cos\alpha\right) g \tag{6.76}$$

$$\dot{x}_S = \frac{2}{3}\left(\sin\alpha - 2\mu\cos\alpha\right) gt \tag{6.77}$$

$$x_S = \frac{1}{3}\left(\sin\alpha - 2\mu\cos\alpha\right) gt^2 \tag{6.78}$$

Parametry kątowe ruchu krążka to:

$$\ddot{\varphi} = \frac{2}{3r}\left(\sin\alpha - 2\mu\cos\alpha\right) g \tag{6.79}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{2}{3r}\left(\sin\alpha - 2\mu\cos\alpha\right) gt \tag{6.80}$$

$$\varphi = \frac{1}{3r}\left(\sin\alpha - 2\mu\cos\alpha\right) gt^2 \tag{6.81}$$

Z równania (6.70) można teraz ostatecznie wyznaczyć siłę w linie, jako:

$$P = \frac{Q}{3}\left(\sin\alpha + \mu\cos\alpha\right) \tag{6.82}$$

Aby odbywał się założony ruch musi być spełniony warunek, że prędkość środka masy krążka jest większa od zera $\dot{x}_S > 0$, co prowadzi do warunku:

$$\sin\alpha - 2\mu\cos\alpha > 0 \tag{6.83}$$

Stąd wynika dolne ograniczenie kąta pochylenia równi w następującej postaci:

$$\mathrm{tg}\alpha > 2\mu \tag{6.84}$$

7. DYNAMIKA UKŁADU BRYŁ

Ruch każdej bryły w układzie opisuje się podając dynamiczne równania jej ruchu. Podaje się również równania wynikające z kinematyki układu. W ten sposób uzyskuje się układ równań różniczkowych.

Zadanie 7.1. Układ trzech brył porusza się pod wpływem siły $\overline{F}$ przyłożonej do bryły 1. Bryła 1 o ciężarze $\overline{Q}_1$ porusza się po chropowatej powierzchni. Jest ona połączona za pomocą nierozciągliwej liny z krążkiem 2 o ciężarze $\overline{Q}_2$ podpartym przegubowo w punkcie O. Krążek 2 jest połączony za pomocą nierozciągliwej liny z krążkiem 3 o ciężarze $\overline{Q}_3$ toczącym się po chropowatej i odkształcalnej równi pochylonej do poziomu pod kątem α. Promienie krążków są znane. Podać równania ruchu brył i rozwiązać je.

Dane:

$$\left.\begin{matrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{matrix}\right\} [N]$$

$R_2=2r_2=2r_3=2r$ [m]

$i_O^{(2)} = 2r$ [m]

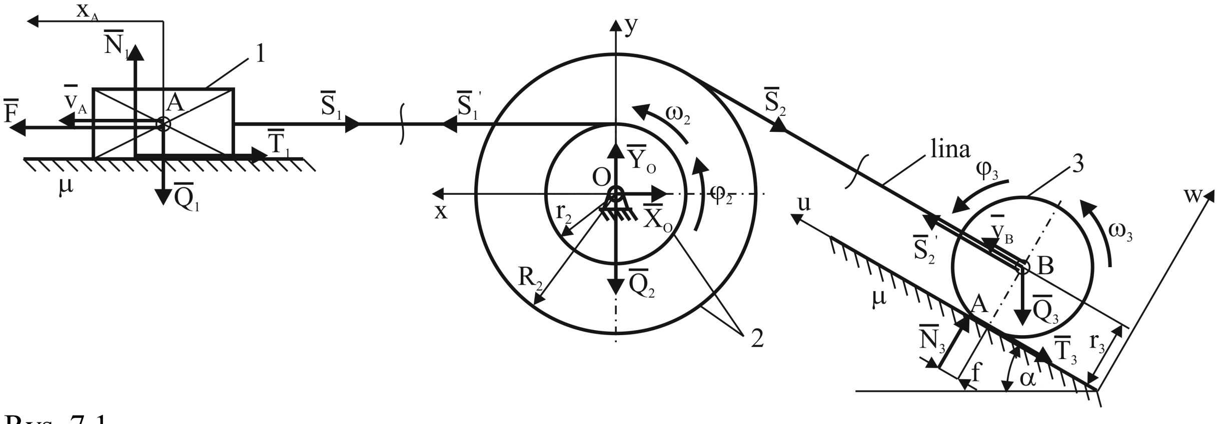
f [m]

μ

α [rad]

F=const.

zerowe warunki początkowe



Rys. 7.1

Rozwiązanie. Wprowadza się wszystkie siły zewnętrzne i wewnętrzne działające na bryły. W rozpatrywanym przypadku siły zewnętrzne to ciężary brył, reakcje podłoży (normalne i styczne), reakcje podpory w punkcie O oraz siła $\overline{F}$ przyłożona w punkcie A. Z kolei siły wewnętrzne to siły, które ujawniają się po przecięciu lin łączących bryły.

a) Kinematyka układu:

Bryła 1 jest w ruchu postępowym, bryła 2 jest w ruchu obrotowym, bryła 3 jest w ruchu płaskim. Zakładamy prędkość np. punktu A czyli v_A i wyrażamy interesujące nas prędkości w funkcji prędkości v_A:

$$\omega_2 = \frac{v_A}{r_2} = \frac{v_A}{r} \tag{7.1}$$

$$v_B = R_2\omega_2 = 2v_A \tag{7.2}$$

$$\omega_3 = \frac{v_B}{r_3} = 2\frac{v_A}{r} \tag{7.3}$$

Ponieważ określono interesujące nas parametry liniowe i kątowe ruchu przy założeniu prędkości punktu A, oznacza to, że analizowany układ jest układem o jednym stopniu swobody. Prędkość punktu A nazywać można prędkością uogólnioną, wówczas współrzędną punktu A można nazywać współrzędną uogólnioną.

Równania kinematyki podamy teraz w następującej symbolice:

$$v_A = \dot{x}_A \tag{7.4}$$

$$\omega_2 = \dot{\varphi}_2 = \frac{\dot{x}_A}{r} \tag{7.5}$$

$$v_B = \dot{u}_B = 2\dot{x}_A \tag{7.6}$$

$$\omega_3 = \dot{\varphi}_3 = 2\frac{\dot{x}_A}{r} \tag{7.7}$$

Określimy teraz dynamiczne równania ruchu brył.

b) Równania ruchu bryły 1 (ruch postępowy w płaszczyźnie xy):

$$m_1\ddot{x}_A = F - T_1 - S_1 \tag{7.8}$$

$$m_1\ddot{y}_A = N_1 - Q_1 = 0 \tag{7.9}$$

Równanie (7.9) można przyrównać do zera bo z założenia punkt A porusza się po linii prostej równoległej do osi x, czyli $y_S = \text{const.}$, $\ddot{y}_S = 0$. Ponieważ bryła 1 ślizga się po chropowatej powierzchni, wprowadzamy tarcie rozwinięte:

$$T_1 = \mu N_1 \tag{7.10}$$

c) Równania ruchu bryły 2 (ruch obrotowy wokół punktu O):

$$m_2\ddot{x}_O = S_1' - X_O - S_2\cos\alpha = 0 \tag{7.11}$$

$$m_2\ddot{y}_O = Y_O - Q_2 - S_2\sin\alpha = 0 \tag{7.12}$$

$$I_O^{(2)}\ddot{\varphi}_2 = S_1' r_2 - S_2 R_2 \tag{7.13}$$

Równania (7.11) i (7.12) można przyrównać do zera, bo punkt O nie porusza się, czyli $\ddot{x}_O = 0$, $\ddot{y}_O = 0$. Masowy moment bezwładności krążka 2 to: $I_O^{(2)} = m_2\left(i_O^{(2)}\right)^2 = 4\frac{Q_2}{g}r^2$

d) Równania ruchu bryły 3 (ruch płaski, najwygodniej jest przyjąć osie u i w jak na rysunku):

$$m_3\ddot{u}_B = S_2' - T_3 - Q_3\sin\alpha \tag{7.14}$$

$$m_3\ddot{w}_B = N_3 - Q_3\cos\alpha = 0 \tag{7.15}$$

$$I_B^{(3)}\ddot{\varphi}_3 = T_3 r_3 - N_3 f \tag{7.16}$$

Równanie (7.15) można przyrównać do zera bo z założenia punkt B porusza się po linii prostej równoległej do osi u, czyli $w_B = \text{const.}$, $\ddot{w}_B = 0$.

e) Zależności siłowe w linach:

$$S_1 = S_1' \tag{7.17}$$

$$S_2 = S_2' \tag{7.18}$$

f) Równania wynikające z kinematyki układu:

$$\ddot{\varphi}_2 = \frac{\ddot{x}_A}{r} \tag{7.19}$$

$$\ddot{u}_B = 2\ddot{x}_A \tag{7.20}$$

$$\ddot{\varphi}_3 = 2\frac{\ddot{x}_A}{r} \tag{7.21}$$

Mamy 14 równań ((7.8)-(7.21)) i 14 niewiadomych: x_A, φ_2, φ_3, u_B, S_1, S_1', S_2, S_2', T_1, T_3, N_1, N_3, X_O, Y_O. Rozwiązanie tych równań dla zerowych warunków początkowych jest następujące:

$$\begin{cases} \ddot{x}_A = \dfrac{F - \mu Q_1 - 2Q_3\left(\dfrac{f}{r} + \sin\alpha\right)}{Q_1 + 4Q_2 + 6Q_3} g \\ \dot{x}_A = \dfrac{F - \mu Q_1 - 2Q_3\left(\dfrac{f}{r} + \sin\alpha\right)}{Q_1 + 4Q_2 + 6Q_3} gt \\ x_A = \dfrac{F - \mu Q_1 - 2Q_3\left(\dfrac{f}{r} + \sin\alpha\right)}{2(Q_1 + 4Q_2 + 6Q_3)} gt^2 \end{cases} \tag{7.22}$$

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_2 = \dfrac{F - \mu Q_1 - 2Q_3\left(\dfrac{f}{r} + \sin\alpha\right)}{(Q_1 + 4Q_2 + 6Q_3)r} g \\ \dot{\varphi}_2 = \dfrac{F - \mu Q_1 - 2Q_3\left(\dfrac{f}{r} + \sin\alpha\right)}{(Q_1 + 4Q_2 + 6Q_3)r} gt \\ \varphi_2 = \dfrac{F - \mu Q_1 - 2Q_3\left(\dfrac{f}{r} + \sin\alpha\right)}{2(Q_1 + 4Q_2 + 6Q_3)r} gt^2 \end{cases} \tag{7.23}$$

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_3 = 2\dfrac{F - \mu Q_1 - 2Q_3\left(\dfrac{f}{r} + \sin\alpha\right)}{(Q_1 + 4Q_2 + 6Q_3)r} g \\ \dot{\varphi}_3 = 2\dfrac{F - \mu Q_1 - 2Q_3\left(\dfrac{f}{r} + \sin\alpha\right)}{(Q_1 + 4Q_2 + 6Q_3)r} gt \\ \varphi_3 = \dfrac{F - \mu Q_1 - 2Q_3\left(\dfrac{f}{r} + \sin\alpha\right)}{(Q_1 + 4Q_2 + 6Q_3)r} gt^2 \end{cases} \tag{7.24}$$

$$\begin{cases} \ddot{u}_B = 2\dfrac{F-\mu Q_1 - 2Q_3\left(\dfrac{f}{r}+\sin\alpha\right)}{Q_1+4Q_2+6Q_3}g \\ \dot{u}_B = 2\dfrac{F-\mu Q_1 - 2Q_3\left(\dfrac{f}{r}+\sin\alpha\right)}{Q_1+4Q_2+6Q_3}gt \\ u_B = \dfrac{F-\mu Q_1 - 2Q_3\left(\dfrac{f}{r}+\sin\alpha\right)}{Q_1+4Q_2+6Q_3}gt^2 \end{cases} \tag{7.25}$$

$$S_1 = S_1^{'} = \frac{Q_1Q_3(\frac{f}{r}-3\mu+\sin\alpha)-2\mu Q_1Q_2+F(2Q_2+3Q_3)}{Q_1+4Q_2+6Q_3} \tag{7.26}$$

$$S_2 = S_2^{'} = \frac{(Q_1+4Q_2)(\frac{f}{r}+\sin\alpha)+3(F-\mu Q_1)}{Q_1+4Q_2+6Q_3}Q_3 \tag{7.27}$$

$$T_1 = \mu Q_1 \tag{7.28}$$

$$T_3 = \frac{(Q_1+4Q_2+4Q_3)\frac{f}{r}-2Q_3\sin\alpha+F-\mu Q_1}{Q_1+4Q_2+6Q_3}Q_3 \tag{7.29}$$

$$N_1 = Q_1 \tag{7.30}$$

$$N_3 = Q_3\cos\alpha \tag{7.31}$$

$$X_O = \frac{Q_1Q_3\left(2\text{-}\cos\alpha\right)\left(\frac{f}{r}-3\mu+\sin\alpha\right)-4\mu Q_1Q_2-4Q_2Q_3\left(\frac{f}{r}+\sin\alpha\right)\cos\alpha+F(4Q_2+6Q_3-Q_3\cos\alpha)}{Q_1+4Q_2+6Q_3} \tag{7.32}$$

$$Y_O = Q_2 + \frac{(Q_1+4Q_2)(\frac{f}{r}+\sin\alpha)+3(F-\mu Q_1)}{Q_1+4Q_2+6Q_3}Q_3\sin\alpha \tag{7.33}$$

Zadanie 7.2. Układ korbowo-wodzikowy przedstawiony na rys. 2 porusza się pod wpływem przyłożonego do bryły 1 momentu M. Ruch odbywa się w płaszczyźnie xy. Przyjąć, że w układzie nie występuje tarcie. Podać równania ruchu brył.

Dane:

$\left.\begin{matrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{matrix}\right\}$ [N]

$OA = r$ [m]

$AB = l$ [m]

$OS_1 = r/2$ [m]

$AS_2 = l/2$ [m]

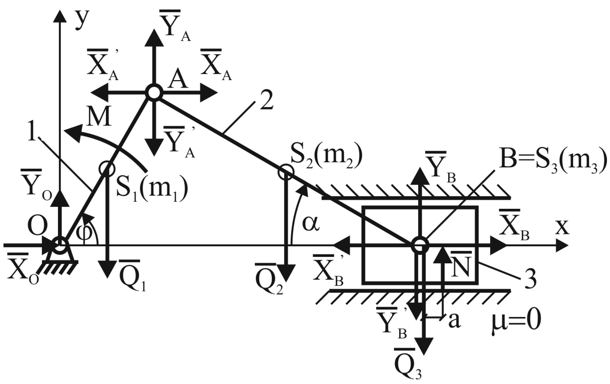
a [m]

$r/l = \lambda$

$\mu = 0$

M [Nm] = const.

zerowe warunki początkowe



Rys. 7.2. odległość a określa położenie punktu zetknięcia bryły 3 z podłożem, $\frac{r}{l}=\lambda<1$ to wynika z faktu, że bryła 1 ma wykonywać pełne obroty

Rozwiązanie. Wprowadza się wszystkie siły zewnętrzne i wewnętrzne działające na bryły. W rozpatrywanym przypadku siły zewnętrzne to ciężary brył, reakcja normalna podłoża $\overline{N}$, reakcje podpory w punkcie O oraz moment M przyłożony do bryły 1. Z kolei siły wewnętrzne to siły, które ujawniają się po rozdzieleniu brył w miejscach ich połączeń (punkty A i B). Siły wewnętrzne $\overline{X}_A$ i $\overline{Y}_A$ przypisano bryle 1, siły $\overline{X}'_A$, $\overline{Y}'_A$, $\overline{X}_B$ i $\overline{Y}_B$ przypisano bryle 2, siły $\overline{X}'_B$ i $\overline{Y}'_B$ przypisano bryle 3.

a) kinematyka układu:

Bryła 1 jest w ruchu obrotowym, bryła 2 jest w ruchu płaskim, bryła 3 jest w ruchu postępowym. Istotna jest znajomość ruchu środków mas poszczególnych brył. Zakładając kąt obrotu bryły 1 φ jako współrzędną uogólnioną oraz prędkość kątową bryły 1 $\omega = \dot{\varphi}$ jako prędkość uogólnioną, opisujemy kinematykę układu następująco:

$$\sin\alpha = \lambda\sin\varphi \tag{7.34}$$

$$x_{S1} = \frac{1}{2} r\cos\varphi \tag{7.35}$$

$$y_{S1} = \frac{1}{2} r\sin\varphi \tag{7.36}$$

$$x_{S2} = r\cos\varphi + \frac{1}{2} l\cos\alpha \tag{7.37}$$

$$y_{S2} = r\sin\varphi - \frac{1}{2} l\sin\alpha \tag{7.38}$$

$$x_{S3} = r\cos\varphi + l\cos\alpha \tag{7.39}$$

Określimy teraz dynamiczne równania ruchu brył.

b) Równania ruchu bryły 1:

$$m_1 \ddot{x}_{S1} = X_O + X_A \tag{7.40}$$

$$m_1 \ddot{y}_{S1} = Y_O + Y_A - Q_1 \tag{7.41}$$

$$I_O^{(1)} \ddot{\varphi} = M - \frac{1}{2} Q_1 r\cos\varphi + Y_A r\cos\varphi - X_A r\sin\varphi \tag{7.42}$$

Równania (7.40) i (7.41) opisują ruch środka masy bryły, natomiast równanie (7.42) opisuje ruch obrotowy bryły wokół punktu O. Masowy moment bezwładności pręta 1 względem punktu O to: $I_O^{(1)} = \frac{1}{3} m_1 r^2 = \frac{1}{3} \frac{Q_1}{g} r^2$.

c) Równania ruchu bryły 2 :

$$m_2 \ddot{x}_{S2} = -X_A^{'} + X_B \tag{7.43}$$

$$m_2 \ddot{y}_{S2} = -Y_A^{'} + Y_B - Q_2 \tag{7.44}$$

$$I_{S2}^{(2)} \ddot{\alpha} = -\frac{1}{2} X_A^{'} l\sin\alpha - \frac{1}{2} Y_A^{'} l\cos\alpha - \frac{1}{2} X_B l\sin\alpha - \frac{1}{2} Y_B l\cos\alpha \tag{7.45}$$

Równania (7.43) i (7.44) opisują ruch środka masy bryły, natomiast równanie (7.45) opisuje ruch obrotowy bryły wokół jej środka masy S_2. Masowy moment bezwładności pręta 2 względem środka masy to: $I_{S2}^{(2)} = \frac{1}{12} m_2 l^2 = \frac{1}{12} \frac{Q_2}{g} l^2$.

d) Równania ruchu bryły 3:

$$m_3 \ddot{x}_{S3} = -X_B^{'} \tag{7.46}$$

$$m_3 \ddot{y}_{S3} = -Y_B^{'} + N - Q_3 = 0 \tag{7.47}$$

$$\sum M_{S3}(\overline{P}_i) = Na = 0 \tag{7.48}$$

Równanie (7.46) można przyrównać do zera bo z założenia punkt S_3 porusza się po linii prostej równoległej do osi x, czyli $y_{S3} = \text{const.}$, $\ddot{y}_{S3} = 0$. Równania (7.46) i (7.47) opisują ruch środka masy bryły. Równanie (7.48) to równanie równowagi statycznej, gdyż bryła 3 nie może wykonywać obrotu.

e) Zależności siłowe:

$$X_A = X_A^{'} \tag{7.49}$$

$$Y_A = Y_A^{'} \tag{7.50}$$

$$X_B = X_B^{'} \tag{7.51}$$

$$Y_B = Y_B^{'} \tag{7.52}$$

Mamy 19 równań ((7.34)-(7.52)) i 19 niewiadomych: φ, α, x_{S1}, y_{S1}, x_{S2}, y_{S2}, x_{S3}, X_O, Y_O, X_A, Y_A, X_A', Y_A', X_B, Y_B, X_B', Y_B', N, a. Podany układ równań jest układem równań nieliniowych. Jego rozwiązanie wymaga symulacji komputerowej.

Zadanie 7.3. Dla układu mechanicznego pokazanego na zamieszczonym rysunku podać różniczkowe równania ruchu, zależności kinematyczne, znając warunki początkowe, określić parametry kinematyczne układu po czasie t[s].

Dane:

$$\left.\begin{array}{l} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{array}\right\} \text{ siły ciężkości poszczególnych brył [N]}$$

P - siła działająca na bryłę 1[N]

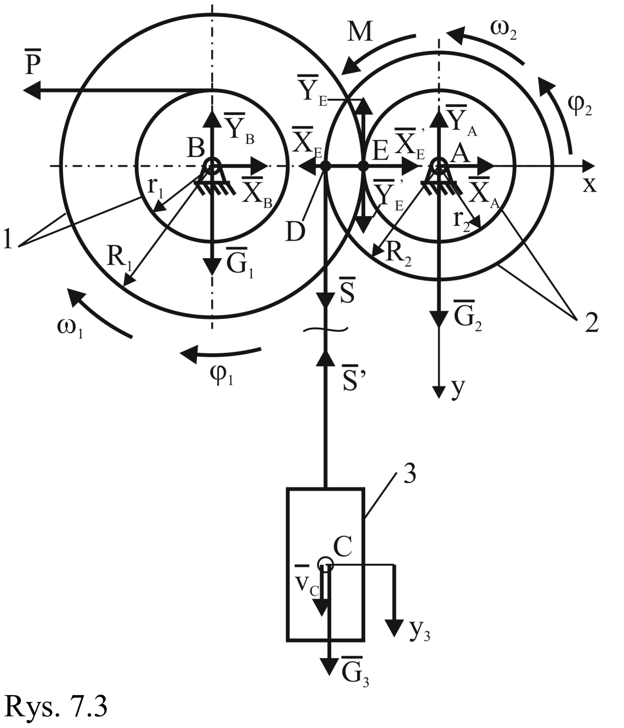
M - moment siły działający na bryłę 2 (wywołuje ruch) [Nm]

$R_1=2r_1=2r$ - promień dużego koła bryły 1 [m]

$R_2=\frac{3}{2}r_2$ - promień dużego koła bryły 2 [m]

$r_2=r$ - promień małego koła bryły 2 [m]

$i_B^{(1)}=i_A^{(2)}=r$ - promień bezwładności odpowiednio bryły 1, 2 [m]



Rys. 7.3

Rozwiązanie. Rozpatrujemy ruch dynamiczny brył 1, 2, 3. Analiza kinematyczna ruchu poszczególnych brył: bryły 1 i 2 poruszają się ruchem obrotowym, bryła 3 jest w ruchu postępowym. Następnie ustalamy kierunek ruchu (np. przemieszczenie φ_2). Określamy siły zewnętrzne działające na bryły, czyli siły czynne i bierne. Na bryły działają siły ciężkości przyłożone w środkach mas poszczególnych brył czyli odpowiednio w punktach A, B i C. W podporach A i B wprowadza się siły reakcji. Z kolei siły wewnętrzne to siły reakcji liny, które ujawniają się po przecięciu liny, oraz siły reakcji w punkcie E, który jest punktem styku krążków. Siły $\overline{X}_E$ i $\overline{Y}_E$ przypisano bryle 1, siły $\overline{X}_E^{'}$, $\overline{Y}_E^{'}$ przypisano bryle 2.

Różniczkowe równanie ruchu bryły 1 będzie miało postać:

$$I_B^{(1)}\ddot{\varphi}_1 = -Pr_1 - Y_E R_1 \tag{7.53}$$

Różniczkowe równanie ruchu bryły 2:

$$I_A^{(2)}\ddot{\varphi}_2 = M + SR_2 + Y_E^{'} r_2 \tag{7.54}$$

Różniczkowe równania ruchu bryły 3 (równania te opisują ruch środka masy bryły 3 na kierunkach osi układu odniesienia):

$$m_3\ddot{x}_3 = \sum_{i=1}^{n} P_{ix} = 0 \text{ (ruch odbywa się względem osi y)} \tag{7.55}$$

$$m_3\ddot{y}_3 = G_3 - S' \tag{7.56}$$

Po określeniu dynamicznych równań ruchu poszczególnych brył podajemy zależności siłowe układu. Zakładamy, że lina będzie zawsze napięta:

$$S = S' \tag{7.57}$$

Ponadto siły reakcji w punkcie E spełniają zależności:

$$\begin{aligned} X_E &= X_E^{'} \\ Y_E &= Y_E^{'} \end{aligned} \tag{7.58}$$

Następnie określamy zależności kinematyczne wynikające z rozkładu prędkości charakterystycznych punktów układu czyli:

$$v_D = v_C \tag{7.59}$$

$$v_D = \omega_2 R_2 \tag{7.60}$$

$$v_C = \dot{y}_3 = \omega_2 R_2 = \dot{\varphi}_2 R_2 \tag{7.61}$$

Krążki 1 i 2 stykają się w punkcie E, zatem zachodzi zależność:

$$v_E^{(1)} = v_E^{(2)} \tag{7.62}$$

$$v_E^{(1)} = \omega_1 R_1 = \dot{\varphi}_1 R_1 \tag{7.63}$$

$$v_E^{(2)} = \omega_2 r_2 = \dot{\varphi}_2 r_2 \tag{7.64}$$

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{r_2}{R_1}\dot{\varphi}_2 \tag{7.65}$$

Różniczkując (7.61) i (7.65) otrzymujemy zależności kinematyczne na przyspieszenia:

$$\ddot{y}_3 = \ddot{\varphi}_2 R_2 \tag{7.66}$$

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{r_2}{R_1}\ddot{\varphi}_2 \tag{7.67}$$

Określamy momenty bezwładności brył. Dla bryły 1:

$$I_B^{(1)} = m_1\left(i_B^{(1)}\right)^2 = m_1 r^2 \tag{7.68}$$

dla bryły 2:

$$I_A^{(2)} = m_2\left(i_A^{(2)}\right)^2 = m_2 r^2 \tag{7.69}$$

W celu wyznaczenia parametrów kątowych ruchu bryły np. 2 należy skorzystać z równania (7.54). Jeśli uwzględnimy równania (7.56) i (7.57), z których wynika, że:

$$S=S'=G_3-m_3\ddot{y}_3 \tag{7.70}$$

oraz równania (7.53) i (7.58), z których wynika, że:

$$Y_E^{'}=Y_E=\frac{-Pr_1-I_B^{(1)}\ddot{\varphi}_1}{R_1} \tag{7.71}$$

otrzymamy

$$I_A^{(2)}\ddot{\varphi}_2=M+\left(G_3-m_3\ddot{y}_3\right)R_2+\frac{-Pr_1-I_B^{(1)}\ddot{\varphi}_1}{R_1}r_2 \tag{7.72}$$

Uwzględniając równania (7.66) – (7.69) oraz geometrię układu otrzymano po przekształceniu przyspieszenie kątowe krążka 2:

$$\ddot{\varphi}_2=\frac{\left(4M+6G_3r-2Pr\right)g}{\left(G_1+4G_2+9G_3\right)r^2} \tag{7.73}$$

Prędkość kątową uzyskamy, całkując powyższe wyrażenie:

$$\dot{\varphi}_2=\frac{\left(4M+6G_3r-2Pr\right)g}{\left(G_1+4G_2+9G_3\right)r^2}t+C_1 \tag{7.74}$$

Kąt obrotu bryły 2 jest równy pierwszej całce z prędkości kątowej, czyli:

$$\varphi_2=\frac{\left(4M+6G_3r-2Pr\right)g}{\left(G_1+4G_2+9G_3\right)r^2}\frac{t^2}{2}+C_1t+C_2 \tag{7.75}$$

W powyższych równaniach występują nieznane wielkości C_1 i C_2. Ich wartość znajdujemy z warunków początkowych. Zakładając np. zerowe warunki początkowe, tzn. dla $t=t_0=0,\ \dot{\varphi}_2(0)=0,\ \varphi_2(0)=0$, otrzymujemy $C_1=0$, $C_2=0$. Ostatecznie równania opisujące parametry ruchu bryły 2 będą następujące:

$$\begin{cases}\ddot{\varphi}_2=\dfrac{\left(4M+6G_3r-2Pr\right)g}{\left(G_1+4G_2+9G_3\right)r^2}\\[2ex] \dot{\varphi}_2=\dfrac{\left(4M+6G_3r-2Pr\right)g}{\left(G_1+4G_2+9G_3\right)r^2}t\\[2ex] \varphi_2=\dfrac{\left(4M+6G_3r-2Pr\right)g}{\left(G_1+4G_2+9G_3\right)r^2}\dfrac{t^2}{2}\end{cases} \tag{7.76}$$

Kinematyczne parametry ruchu brył 1 i 3 zależą od kinematycznych parametrów ruchu krążka 2. Można je otrzymać korzystając z zapisanych wcześniej równań kinematyki.

Zadanie 7.4. Dla układu mechanicznego brył o znanych ciężarach $\bar{G}_1$, $\bar{G}_2$, $\bar{G}_3$, pokazanego na rysunku, podać różniczkowe równania ruchu oraz zależności kinematyczne. Następnie, przyjmując zerowe warunki początkowe, rozwiązać te równania tak, aby wyznaczyć parametry kątowe ruchu krążka 3.

Dane:

$\left.\begin{matrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{matrix}\right\}$ [N]

F [N]

α, β [rad]

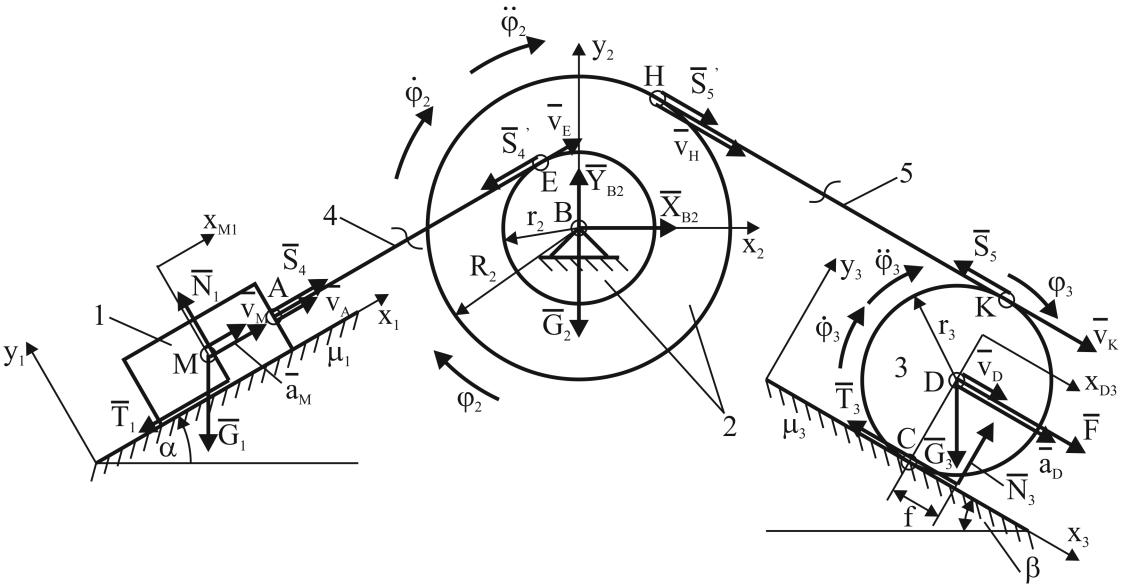
R_2, r_2, r_3, i_2, f [m]

μ_1, μ_2 [-]

warunki początkowe

dla $t = t_0 = 0$ [s], $\varphi_3(0) = 0$ [rad], $\dot{\varphi}_3(0) = 0$ [rad/s]

1 – bryła, 2,3 – krążek, 4,5 – lina



Rys. 7.4

Rozwiązanie. Bryła 1 porusza się ruchem postępowym, bryła 2 jest w ruchu obrotowym, bryła 3 jest w ruchu płaskim. Należy przyjąć układ odniesienia, wygodnie jest to zrobić w taki sposób, aby kierunek jednej z osi układu odniesienia, np. osi x, pokrywał się z kierunkiem ruchu bryły. W przypadku układu brył można przyjąć pomocnicze układy odniesienia dla poszczególnych brył. Należy przyjąć kierunek ruchu punktu M, zaznaczyć założone przemieszczenie punktu M, x_{M1}, co wiąże się z przyjęciem założonego przemieszczenia kątowego krążka drugiego φ_2 w prawo, założonego przemieszczenia punktu D krążka trzeciego x_{D3} oraz założonego kąta obrotu krążka 3 w prawo φ_3. Należy wprowadzić wszystkie siły bierne działające na bryły: reakcję podłoża w punkcie styku bryły 1 z podłożem (styczną $\overline{T}_1$ i normalną $\overline{N}_1$), reakcję podpory stałej punktu ułożyskowania krążka 2 (rozłożoną na składowe $\overline{X}_{B2}$ i $\overline{Y}_{B2}$), reakcję w punkcie styku krążka 3 z podłożem (styczną $\overline{T}_3$ i normalną $\overline{N}_3$), oraz siły napięcia lin $\overline{S}_4$, $\overline{S}_4'$, $\overline{S}_5$, $\overline{S}_5'$.

Dynamiczne równania ruchu bryły 1 będą miały postać:

$$m_1\ddot{x}_{M1} = S_4 - T_1 - G_1 \sin\alpha \tag{7.77}$$

$$m_1\ddot{y}_{M1} = N_1 - G_1\cos\alpha \tag{7.78}$$

Dynamiczne równania ruchu bryły 2 będą miały postać:

$$I_B\ddot{\varphi}_2 = S_5^{'}R_2 - S_4^{'}r_2 \tag{7.79}$$

Dynamiczne równania ruchu bryły 3 będą miały postać:

$$m_3\ddot{x}_{D3} = F - S_5 - T_3 + G_3 \sin\beta \tag{7.80}$$

$$m_3\ddot{y}_{D3} = N_3 - G_3\cos\beta \tag{7.81}$$

$$I_D\ddot{\varphi}_3 = -S_5r_3 - N_3f + T_3r_3 \tag{7.82}$$

Należy uwzględnić zależności:

$$T_1 = \mu_1N_1 \tag{7.83}$$

$$T_3 \le \mu_3N_3 \tag{7.84}$$

Równania więzów siłowych przyjmują postać:

$$S_4 = S_4^{'} \tag{7.85}$$

$$S_5 = S_5^{'} \tag{7.86}$$

Zakłada się, że bryły 1 i 3 cały czas mają kontakt z równią, ruch na kierunkach osi odpowiednio y_1 i y_3 nie występuje. Z czego wynika, że:

$$\begin{cases} y_{M1} = \text{const.} \\ \dot{y}_{M1} = 0 \\ \ddot{y}_{M1} = 0 \end{cases} \tag{7.87}$$

oraz

$$\begin{cases} y_{D3} = \text{const.} \\ \dot{y}_{D3} = 0 \\ \ddot{y}_{D3} = 0 \end{cases} \tag{7.88}$$

Zatem z równania (7.78) łatwo określić wartość reakcji N_1 jako:

$$N_1 = G_1\cos\alpha \tag{7.89}$$

Natomiast z równania (7.81) można określić wartość reakcji N_3:

$$N_3 = G_3\cos\beta \tag{7.90}$$

Następnie należy wypisać równania więzów kinematycznych. Zakładając, że liny 4 i 5 są nierozciągliwe, wektory prędkości punktów charakterystycznych M, A i E są takie same, podobnie jak wektory prędkości punktów H i K. Stąd wynika, że:

$$\overline{v}_M = \overline{v}_A = \overline{v}_E \tag{7.91}$$

$$v_M = v_A = \dot{\varphi}_2r_2 \tag{7.92}$$

gdzie $v_M = \dot{x}_{M1}$, oraz

$$\overline{v}_H = \overline{v}_K = 2\overline{v}_D \tag{7.93}$$

$$\dot{\varphi}_2R_2 = 2\dot{\varphi}_3r_3 = 2v_D \tag{7.94}$$

zakładając położenie chwilowego środka obrotu krążka 3 w punkcie C i traktując ruch płaski jako chwilowy ruch obrotowy, gdzie $v_D = \dot{x}_{D3}$.

Następnie, korzystając z równań więzów kinematycznych, należy wyznaczyć zależności umożliwiające określenie przyspieszeń poszczególnych punktów oraz przyspieszeń kątowych brył. Z równania (7.92) po jednokrotnym zróżniczkowaniu otrzymamy:

$$a_A = \ddot{x}_{M1} = \ddot{\varphi}_2r_2 \tag{7.95}$$

natomiast z równania (7.94) otrzymamy:

$$\ddot{\varphi}_2R_2 = 2\ddot{\varphi}_3r_3 \tag{7.96}$$

Ponieważ interesują nas parametry kątowe ruchu krążka 3, należy wszystkie przyspieszenia punktów i przyspieszenia kątowe brył wyrazić w funkcji przyspieszenia kątowego bryły 3 ($\ddot{\varphi}_3$). Z (7.96) otrzymamy:

$$\ddot{\varphi}_2 = \ddot{\varphi}_3 \frac{2r_3}{R_2} \tag{7.97}$$

natomiast z (7.95) i (7.97) otrzymamy:

$$\ddot{x}_{M1} = \ddot{\varphi}_2 r_2 = \ddot{\varphi}_3 \frac{2r_3 r_2}{R_2} \tag{7.98}$$

Wartość przyspieszenia punktu D wyrażona w funkcji $\ddot{\varphi}_3$ na podstawie zależności (7.94) wynosi:

$$a_D = \ddot{x}_{D3} = \ddot{\varphi}_3 r_3 \tag{7.99}$$

W różniczkowych równaniach ruchu masy poszczególnych brył należy wyrazić w funkcji znanych wartości, w treści zadania podano wartości ciężarów brył 1-3, stąd:

$$G_1 = m_1 g,\ G_2 = m_2 g,\ G_3 = m_3 g \tag{7.100}$$

Po przekształceniu otrzymujemy:

$$m_1 = \frac{G_1}{g},\ m_2 = \frac{G_2}{g},\ m_3 = \frac{G_3}{g} \tag{7.101}$$

W różniczkowych równaniach ruchu brył 2 i 3 występują masowe momenty bezwładności, których wartości wynoszą odpowiednio:

$$I_B = m_2 i_2^2 = \frac{G_2}{g} i_2^2 \tag{7.102}$$

$$I_D = \frac{1}{2} m_3 r_3^2 = \frac{1}{2}\frac{G_3}{g} r_3^2 \tag{7.103}$$

Następnie należy wyznaczyć $\ddot{\varphi}_3$ z równania (7.82). W równaniu tym niewiadome to: S_5 oraz T_3. Wartość siły S_5 można wyznaczyć z (7.79) biorąc pod uwagę (7.77), (7.83), (7.85), (7.86) i (7.89), gdzie z (7.79) i (7.86):

$$S_5 = S_5' = \frac{1}{R_2}\left[I_B \ddot{\varphi}_2 + S_4' r_2 \right] \tag{7.104}$$

natomiast wartość siły S_4 można wyznaczyć z (7.77) uwzględniając (7.83), (7.85) i (7.89):

$$S_4 = m_1 \ddot{x}_{M1} + T_1 + G_1 \sin\alpha \tag{7.105}$$

$$S_4 = \frac{G_1}{g} \ddot{x}_{M1} + \mu_1 N_1 + G_1 \sin\alpha \tag{7.106}$$

$$S_4 = S_4' = \frac{G_1}{g} \ddot{x}_{M1} + \mu_1 G_1 \cos\alpha + G_1 \sin\alpha = \frac{G_1}{g} \ddot{x}_{M1} + G_1\left(\mu_1 \cos\alpha + \sin\alpha\right) \tag{7.107}$$

Podstawiając (7.107) do (7.104) otrzymamy:

$$S_5 = \frac{1}{R_2}\left[I_B \ddot{\varphi}_2 + \frac{G_1}{g} r_2 \ddot{x}_{M1} + G_1 r_2 \left(\mu_1 \cos\alpha + \sin\alpha\right) \right] \tag{7.108}$$

Na podstawie (7.108) z równania (7.80) można wyznaczyć T_3, uwzględniając (7.90) i (7.101):

$$T_3 = F - S_5 + G_3 \sin\beta - m_3 \ddot{x}_{D3} \tag{7.109}$$

$$T_3 = F - \frac{1}{R_2}\left[I_B \ddot{\varphi}_2 + \frac{G_1}{g} r_2 \ddot{x}_{M1} + G_1 r_2 \left(\mu_1 \cos\alpha + \sin\alpha\right) \right] + G_3 \sin\beta - \frac{G_3}{g} \ddot{x}_{D3} \tag{7.110}$$

Podstawiając (7.90), (7.108) i (7.110) do (7.82) otrzymamy:

$$I_D\ddot{\varphi}_3=-\frac{r_3}{R_2}\left[I_B\ddot{\varphi}_2+\frac{G_1}{g}r_2\ddot{x}_{M1}+G_1r_2\left(\mu_1\cos\alpha+\sin\alpha\right)\right]-G_3f\cos\beta+$$
$$+\left[F-\frac{1}{R_2}\left[I_B\ddot{\varphi}_2+\frac{G_1}{g}r_2\ddot{x}_{M1}+G_1r_2\left(\mu_1\cos\alpha+\sin\alpha\right)\right]+G_3\sin\beta-\frac{G_3}{g}\ddot{x}_{D3}\right]r_3 \tag{7.111}$$

W równaniu (7.111) należy wszystkie przyspieszenia punktów ($\ddot{x}_{M1}$, $\ddot{x}_{D3}$) oraz przyspieszenia kątowe brył ($\ddot{\varphi}_2$) wyrazić w funkcji $\ddot{\varphi}_3$, korzystając z zależności (7.97), (7.98) i (7.99):

$$I_D\ddot{\varphi}_3=-\frac{r_3}{R_2}\left[I_B\frac{2r_3}{R_2}\ddot{\varphi}_3+\frac{G_1}{g}\frac{2r_3r_2^2}{R_2}\ddot{\varphi}_3+G_1r_2\left(\mu_1\cos\alpha+\sin\alpha\right)\right]-G_3f\cos\beta+$$
$$+\left[F-\frac{1}{R_2}\left[I_B\frac{2r_3}{R_2}\ddot{\varphi}_3+\frac{G_1}{g}\frac{2r_3r_2^2}{R_2}\ddot{\varphi}_3+G_1r_2\left(\mu_1\cos\alpha+\sin\alpha\right)\right]+G_3\sin\beta-\frac{G_3}{g}r_3\ddot{\varphi}_3\right]r_3 \tag{7.112}$$

Grupując wyrazy w (7.112) i odpowiednio przekształcając otrzymamy:

$$\left[I_D+I_B\frac{4r_3^2}{R_2^2}+\frac{G_1}{g}\frac{4r_3^2r_2^2}{R_2^2}+\frac{G_3}{g}r_3^2\right]\ddot{\varphi}_3=-G_1\frac{r_3r_2}{R_2}\left(\mu_1\cos\alpha+\sin\alpha\right)+$$
$$-G_3f\cos\beta+Fr_3-G_1\frac{r_3r_2}{R_2}\left(\mu_1\cos\alpha+\sin\alpha\right)+G_3r_3\sin\beta \tag{7.113}$$

W równaniu (7.113) uwzględniamy (7.102) i (7.103), wyznaczamy wartość $\ddot{\varphi}_3$ w funkcji znanych wielkości:

$$\ddot{\varphi}_3=\underbrace{\frac{Fr_3+G_3\left(r_3\sin\beta-f\cos\beta\right)-2G_1\frac{r_3r_2}{R_2}\left(\mu_1\cos\alpha+\sin\alpha\right)}{\frac{G_1}{g}\frac{4r_3^2r_2^2}{R_2^2}+\frac{G_2}{g}\frac{4r_3^2}{R_2^2}i_2^2+\frac{3}{2}\frac{G_3}{g}r_3^2}}_{K} \tag{7.114}$$

Prawa strona równania (7.114) jest stała, dla wygody zapisu oznaczono ją jako K. Zadanie polega na wyznaczeniu kątowych parametrów ruchu krążka 3, należy jednokrotnie scałkować $\ddot{\varphi}_3$ aby otrzymać prędkość kątową $\dot{\varphi}_3$, następnie jednokrotnie całkując $\dot{\varphi}_3$ otrzymamy kąt obrotu krążka 3, φ_3:

$$\dot{\varphi}_3=\int_0^t\ddot{\varphi}_3dt=\int_0^tKdt=Kt+C_1 \tag{7.115}$$

$$\varphi_3=\int_0^t\dot{\varphi}_3dt=\int_0^t\left(Kt+C_1\right)dt=\frac{1}{2}Kt^2+C_1t+C_2 \tag{7.116}$$

Stałe całkowania C_1 i C_2 wyznaczamy uwzględniając warunki początkowe w równaniach (7.115) i (7.116) dla czasu t=0 [s], otrzymamy:

$$C_1=0$$
$$C_2=0 \tag{7.117}$$

Ostatecznie, uwzględniając zerowe warunki początkowe, kątowe parametry ruchu krążka 3 wynoszą:

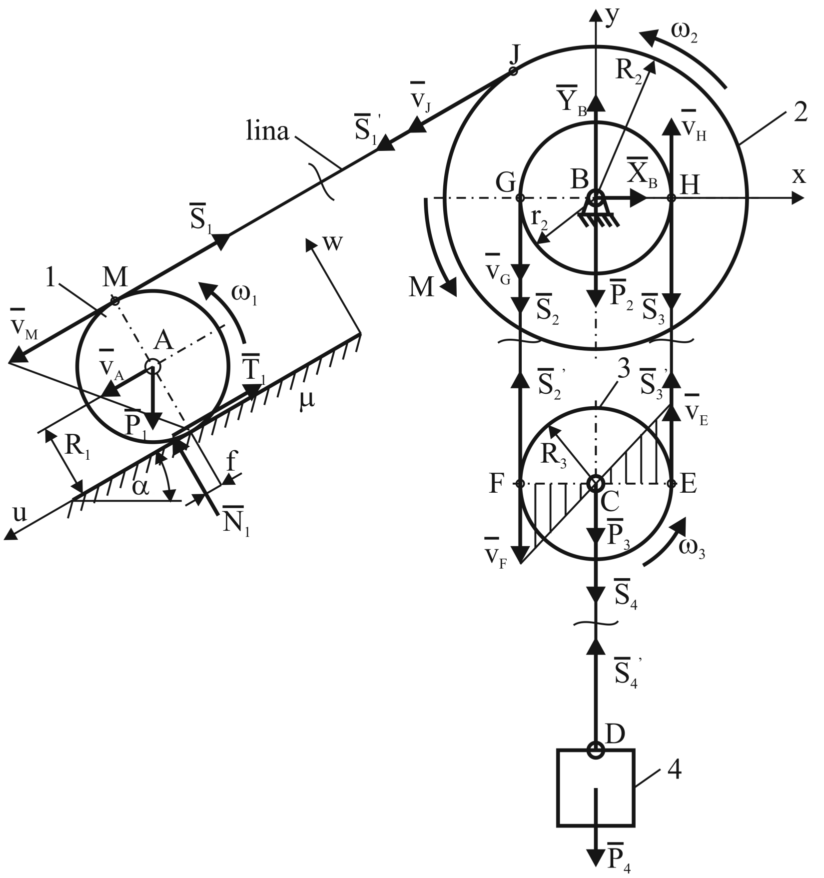
$$\ddot{\varphi}_3=\frac{Fr_3+G_3\left(r_3\sin\beta-f\cos\beta\right)-2G_1\frac{r_3r_2}{R_2}\left(\mu_1\cos\alpha+\sin\alpha\right)}{\frac{G_1}{g}\frac{4r_3^2r_2^2}{R_2^2}+\frac{G_2}{g}\frac{4r_3^2}{R_2^2}i_2^2+\frac{3}{2}\frac{G_3}{g}r_3^2}\left[\frac{rad}{s^2}\right] \tag{7.118}$$

$$\dot{\varphi}_3=\frac{Fr_3+G_3\left(r_3\sin\beta-f\cos\beta\right)-2G_1\frac{r_3r_2}{R_2}\left(\mu_1\cos\alpha+\sin\alpha\right)}{\frac{G_1}{g}\frac{4r_3^2r_2^2}{R_2^2}+\frac{G_2}{g}\frac{4r_3^2}{R_2^2}i_2^2+\frac{3}{2}\frac{G_3}{g}r_3^2}t\left[\frac{rad}{s}\right] \tag{7.119}$$

$$\varphi_3=\frac{1}{2}\frac{Fr_3+G_3\left(r_3\sin\beta-f\cos\beta\right)-2G_1\frac{r_3r_2}{R_2}\left(\mu_1\cos\alpha+\sin\alpha\right)}{\frac{G_1}{g}\frac{4r_3^2r_2^2}{R_2^2}+\frac{G_2}{g}\frac{4r_3^2}{R_2^2}i_2^2+\frac{3}{2}\frac{G_3}{g}r_3^2}t^2\left[rad\right] \tag{7.120}$$

Zadanie 7.5. Opisać zjawisko ruchu mechanizmu pokazanego na rysunku. Układ mechaniczny pokazany na rysunku porusza się pod wpływem sił ciężkości i przyłożonego momentu. Mając dane siły ciężkości poszczególnych brył $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{P}_3$, $\overline{P}_4$, promienie tych brył (R_1, R_2, r_2, R_3), ramię oporu toczenia f, promień bezwładności bryły 1 ($i_B^{(2)}$=i [m]), moment siły M działający na bryłę 2, współczynnik tarcia μ oraz kąt pochylenia równi α. Należy podać różniczkowe równania ruchu, zależności kinematyczne, następnie przyjmując zerowe warunki początkowe rozwiązać te równania.

Dane:
P_1, P_2, P_3 – siły ciężkości poszczególnych brył [N],
R_2 – promień dużego koła bryły 2 [m],
r_2– promień małego koła bryły 2 [m],
R_1, R_3– promienie brył 1 i 3 [m],
f – ramię oporu toczenia [m],
$i_B^{(2)}$=i – promień bezwładności bryły 2 [m],
M=const – moment siły działający na bryłę 2 [Nm],
μ – współczynnik tarcia,
α – kąt pochylenia równi.



Rys. 7.5

Rozwiązanie. Przyjęto układ odniesienia xy związany z podpora w punkcie B. Ponadto z równią związano drugi układ odniesienia uw. Należy wprowadzić wszystkie siły zewnętrzne i wewnętrzne działające na bryły.

Następnie określamy zależności kinematyczne wynikające z rozkładu prędkości charakterystycznych punktów układu. Bryła 1 jest w ruchu płaskim, bryła 2 jest w ruchu obrotowym. Zakładamy np. prędkość kątową krążka 2 $\dot{\varphi}_2$ i zapiszemy:

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{\dot{\varphi}_2 R_2}{2R_1} \tag{7.121}$$

$$\dot{u}_A = \frac{\dot{\varphi}_2 R_2}{2} \tag{7.122}$$

$$\dot{\varphi}_3 = \frac{\dot{\varphi}_2 r_2}{R_3} \tag{7.123}$$

Z rozkładu prędkości punktów E i F należących do krążka 3 wynika, że punkt C jest nieruchomy, i krążek 3 znajduje się w ruchu obrotowym wokół punktu C. Zatem bryła 4 pozostaje w spoczynku. Różniczkując powyższe wyrażenia, otrzymamy zależności kinematyczne na przyśpieszenia:

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{\ddot{\varphi}_2 R_2}{2R_1} \tag{7.124}$$

$$\ddot{u}_A = \frac{\ddot{\varphi}_2 R_2}{2} \tag{7.125}$$

$$\ddot{\varphi}_3 = \frac{\ddot{\varphi}_2 r_2}{R_3} \tag{7.126}$$

Dynamiczne równania ruchu opisujące ruch bryły 1 mają postać:

$$m_1\ddot{u}_A=-T_1-S_1+P_1\sin\alpha \quad (7.127)$$

$$m_1\ddot{w}_A=0=N_1-P_1\cos\alpha \quad (7.128)$$

$$I_A\ddot{\varphi}_1=-S_1R_1-N_1f+T_1R_1 \quad (7.129)$$

Dynamiczne równania ruchu opisujące ruch bryły 2 mają postać:

$$m_2\ddot{x}_B=0=X_B-S'_1\cos\alpha \quad (7.130)$$

$$m_2\ddot{y}_B=0=Y_B-P_2-S_2-S_3-S'_1\sin\alpha \quad (7.131)$$

$$I_B\ddot{\varphi}_2=-S_3r_2+S_2r_2+M+S'_1R_2 \quad (7.132)$$

Dynamiczne równania ruchu opisujące ruch bryły 3 mają postać:

$$m_3\ddot{x}_C=0 \quad (7.133)$$

$$m_3\ddot{y}_C=0=-P_3-S_4+S'_2+S'_3 \quad (7.134)$$

$$I_C\ddot{\varphi}_3=S'_3R_3-S'_2R_3 \quad (7.135)$$

Równanie opisujące równowagę statyczną bryły 4 ma postać:

$$S'_4=P_4 \quad (7.136)$$

Po określeniu dynamicznych równań ruchu poszczególnych brył podajemy zależności siłowe układu. Zakładamy, że wszystkie liny w układzie są zawsze napięte. Będziemy więc mieli:

$$S_1=S'_1 \quad (7.137)$$

$$S_2=S'_2 \quad (7.138)$$

$$S_3=S'_3 \quad (7.139)$$

$$S_4=S'_4 \quad (7.140)$$

Określamy momenty bezwładności poszczególnych brył:

$$I_A^{(1)}=\frac{1}{2}m_1R_1^2 \quad (7.141)$$

$$I_B^{(2)}=m_2\left(i_B^{(2)}\right)^2=m_2i^2 \quad (7.142)$$

$$I_C^{(3)}=\frac{1}{2}m_3R_3^2 \quad (7.143)$$

Rozwiązujemy poszczególne równania w następującej kolejności:

Z równania (7.128) mamy: $N_1=P_1\cos\alpha$ (7.144)

Z równania (7.130) i (7.137) mamy: $X_B=S_1\cos\alpha$ (7.145)

Z równania (7.134) i (7.138) mamy: $S_2=P_3+P_4-S_3$ (7.146)

Z równania (7.131) i (7.137) mamy: $Y_B=P_1+P_2+P_3+S_1\sin\alpha$ (7.147)

Z równania (7.135) mamy: $\frac{P_3}{2g}R_3r_2\ddot{\varphi}_2=-P_3R_3-P_4R_3+2S_3R_3$ (7.148)

Z równania (7.132) mamy: $\frac{P_2}{g}(i)^2\ddot{\varphi}_2=-2S_3r_2+P_3r_2+P_4r_2+M+S_1R_2$ (7.149)

Z równania (7.129) mamy: $\frac{P_1}{4g}R_1R_2\ddot{\varphi}_2=-S_1R_1-fP_1\cos\alpha+T_1R_1$ (7.150)

Z równania (7.127) mamy: $\frac{P_1R_2\ddot{\varphi}_2}{2g}=-T_1-S_1+P_1\sin\alpha$ (7.151)

Z równania (7.148) obliczamy S_3:

$$S_3=\frac{P_3}{4g}r_2\ddot{\varphi}_2+\frac{1}{2}P_3+\frac{1}{2}P_4 \qquad (7.152)$$

Z równania (7.149) obliczamy S_1:

$$S_1=\frac{1}{R_2}\left[\left(\frac{P_2}{g}(i)^2+\frac{P_3}{2g}r_2^2\right)\ddot{\varphi}_2-M\right] \qquad (7.153)$$

Z równania (7.151) obliczamy T_1:

$$T_1=-\left[\frac{1}{R_2}\left(\frac{P_2}{g}(i)^2+\frac{P_3}{2g}r_2^2\right)+\frac{P_1R_2}{2g}\right]\ddot{\varphi}_2+\frac{M}{R_2}+P_1\sin\alpha \qquad (7.154)$$

Z równania (7.150) obliczamy $\ddot{\varphi}_2$:

$$\ddot{\varphi}_2=\frac{2M+P_1\left(R_2\sin\alpha-\frac{R_2}{R_1}f\cos\alpha\right)}{\frac{3}{4}P_1R_2^2+2P_2i^2+P_3r_2^2}g \qquad (7.155)$$

Po scałkowaniu określimy $\dot{\varphi}_2$ oraz φ_2.

8. DYNAMIKA UKŁADU BRYŁ – METODY ENERGETYCZNE

Zadanie 8.1. Na rys. 1 przedstawiono układ mechaniczny, którego geometria jest znana. Wiadomo, że w położeniu początkowym I prędkość bryły 1 była równa zeru. Stosując zasadę równowartości energii kinetycznej i pracy obliczyć prędkość kątową bryły 4, gdy bryła 1 zajmie położenie II.

Dane:

$m_1 = m[kg]$

$m_2 = 2m[kg]$

$m_3 = 6m[kg]$

$m_4 = 4m[kg]$

$m_5 = 2m[kg]$

$r_1 = r[m]$

$r_3 = 2r[m]$

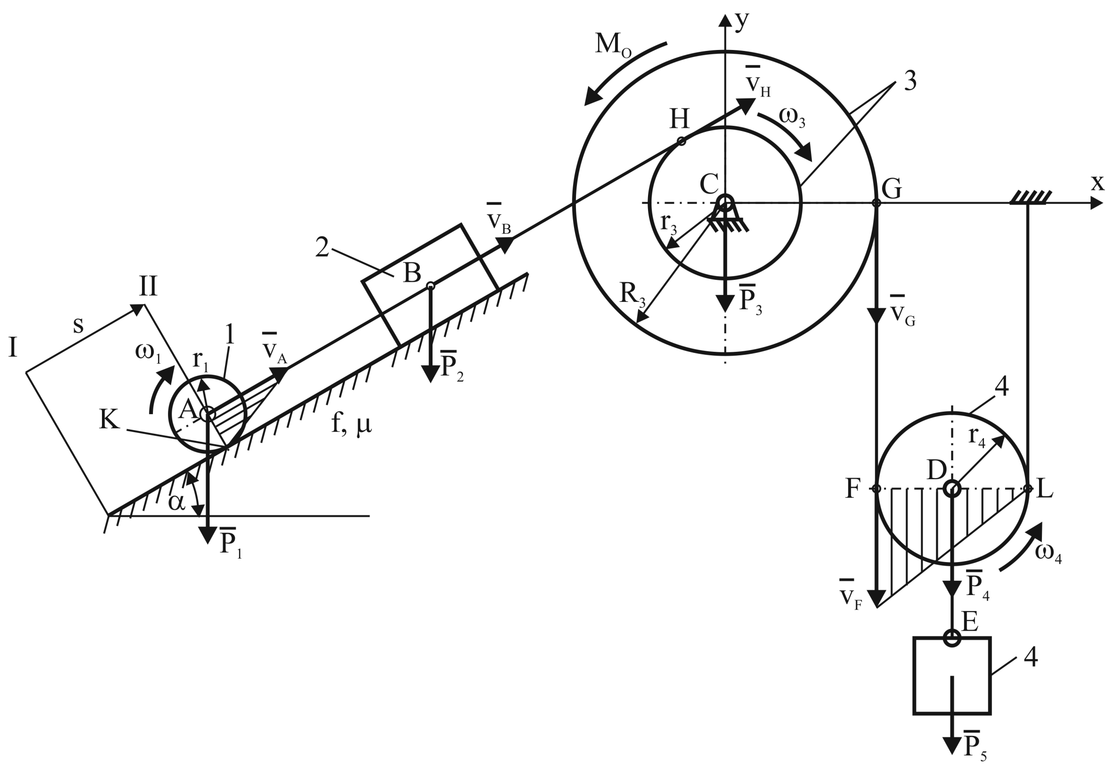
$R_3 = 4r[m]$

$r_4 = 2r[m]$

$i_C = 3r[m]$

$s[m]$, μ, $f[m]$, $\alpha[rad]$

$M_o[Nm]$ – moment oporu



Rys. 8.1

Rozwiązanie. Zasada równowartości energii kinetycznej i pracy jest przedstawiona następującym wzorem:

$$E_{II} - E_I = L_{I-II} \tag{8.1}$$

W położeniu I układ jest nieruchomy a więc:

$$E_I=0 \tag{8.2}$$

W położeniu II energia układu będzie:

$$E_{II}=E_{II}^{(1)}+E_{II}^{(2)}+E_{II}^{(3)}+E_{II}^{(4)}+E_{II}^{(5)} \tag{8.3}$$

gdzie:

$$E_{II}^{(1)}=\frac{1}{2}m_1v_A^2+\frac{1}{2}I_A\omega_1^2 \tag{8.4}$$

$$E_{II}^{(2)}=\frac{1}{2}m_2v_B^2 \tag{8.5}$$

$$E_{II}^{(3)}=\frac{1}{2}I_C\omega_3^2 \tag{8.6}$$

$$E_{II}^{(4)}=\frac{1}{2}m_4v_D^2+\frac{1}{2}I_D\omega_4^2 \tag{8.7}$$

$$E_{II}^{(5)}=\frac{1}{2}m_5v_E^2 \tag{8.8}$$

Masowe momenty bezwładności:

$$I_A=\frac{1}{2}m_1r_1^2=\frac{1}{2}mr^2 \tag{8.9}$$

$$I_C=m_3i_C^2=54mr^2 \tag{8.10}$$

$$I_D=\frac{1}{2}m_4r_4^2=8mr^2 \tag{8.11}$$

W celu opisania zależności kinematycznych założono prędkość kątową bryły 4 ω_4, i określono:

$$v_E=v_D=\omega_4r_4=2\omega_4r \tag{8.12}$$

$$\left.\begin{array}{l} v_G=v_F=\omega_4 2r_4=4\omega_4r \\ v_G=\omega_3R_3=4\omega_3r \end{array}\right\}\Rightarrow \omega_3=\omega_4 \tag{8.13}$$

$$v_A=v_B=v_H=\omega_3r_3=2\omega_4r \tag{8.14}$$

$$v_A=\omega_1r_1=\omega_1r \tag{8.15}$$

Z równań (8.14) i (8.15) otrzymano

$$\omega_1=2\omega_4 \tag{8.16}$$

Uwzględniając masowe momenty bezwładności (8.9) - (8.11) i zależności kinematyczne (8.12) - (8.16) zależności (8.3) - (8.8) przedstawiono następująco:

(4): $E_{II}^{(1)}=2m\omega_4^2r^2+m\omega_4^2r^2=3m\omega_4^2r^2$

(5): $E_{II}^{(2)}=4m\omega_4^2r^2$

(6): $E_{II}^{(3)}=27m\omega_4^2r^2$

(7): $E_{II}^{(4)}=8m\omega_4^2r^2+4m\omega_4^2r^2=12m\omega_4^2r^2$

(8): $E_{II}^{(5)}=4m\omega_4^2r^2$

(3): $E_{II}=50m\omega_4^2r^2$

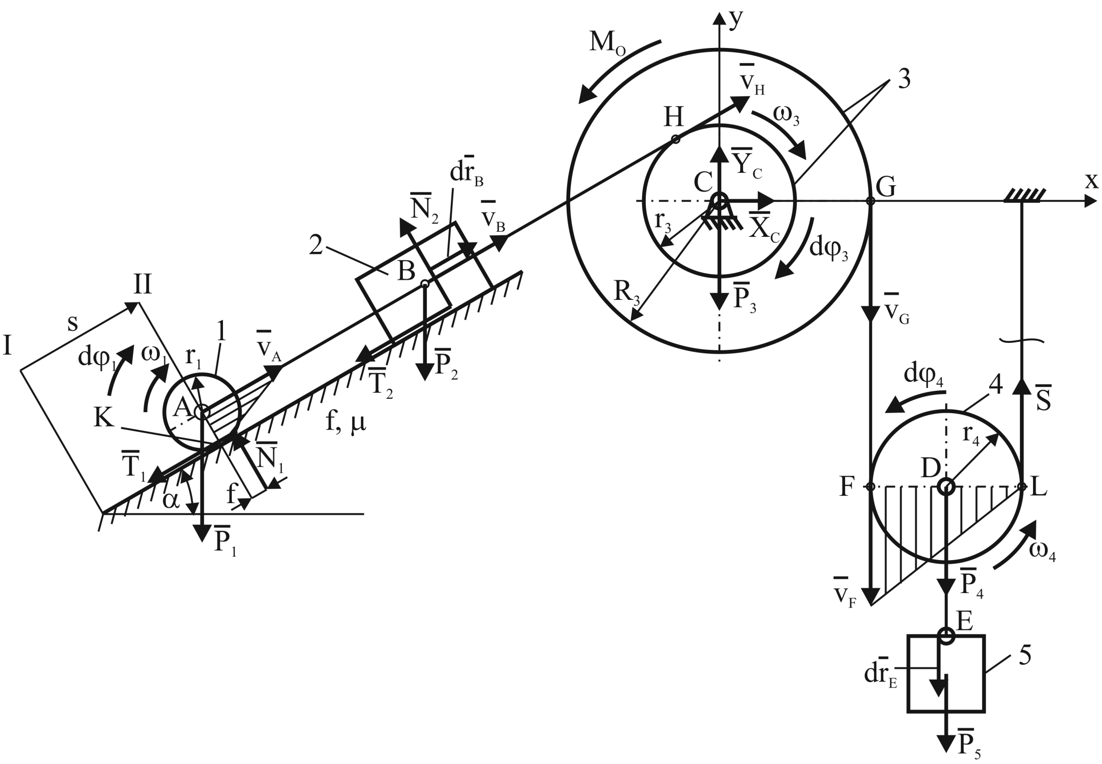
Wykonana praca od położenia I do II przedstawia się następująco:

$$L_{I\text{-}II}=\int\delta L \tag{8.17}$$

gdzie δL to praca elementarna sił działających na poszczególne bryły:

$$\delta L=\delta L^{(1)}+\delta L^{(2)}+\delta L^{(3)}+\delta L^{(4)}+\delta L^{(5)} \tag{8.18}$$

Należy na rysunku wprowadzić wszystkie siły zewnętrzne i obliczyć ich pracę (w rozważanym zadaniu siły wewnętrzne – siły w linach – pracy nie wykonują).



Rys. 8.2

$$\delta L^{(1)}=M_K d\varphi_1=\left(-P_1 r_1 \sin\alpha - N_1 f\right)d\varphi_1 \tag{8.19}$$

gdzie $d\varphi_1$ to elementarny obrót.

$$\delta L^{(2)}=\overline{P}d\overline{r}_B=\left(-P_2\sin\alpha-T_2\right)dr_B \tag{8.20}$$

gdzie $d\overline{r}_B$ to wektor przesunięcia elementarnego.

$$\delta L^{(3)}=M_C d\varphi_3=-M_o d\varphi_3 \tag{8.21}$$

$$\delta L^{(4)}=M_L d\varphi_4=P_4 r_4 d\varphi_4 \tag{8.22}$$

$$\delta L^{(5)}=\overline{P}d\overline{r}_E=P_5 dr_E \tag{8.23}$$

Z zależności kinematycznych (8.12) - (8.16) zapisano

$$d\varphi_1=2d\varphi_4 \tag{8.24}$$

$$dr_B=2d\varphi_4 r \tag{8.25}$$

$$d\varphi_3=d\varphi_4 \tag{8.26}$$

$$dr_E=2d\varphi_4 r \tag{8.27}$$

Zależności siłowe

$$T_2=\mu N_2=\mu P_2\cos\alpha \tag{8.28}$$

$$N_1=P_1\cos\alpha \tag{8.29}$$

Podstawiając zależności (8.19) – (8.29) do (8.18) oraz uwzględniając dane otrzymano:

$$\delta L=\left(-6mgr\sin\alpha-2mgf\cos\alpha-4mgr\mu\cos\alpha-M_o+12mgr\right)d\varphi_4 \tag{8.30}$$

Podstawiając zależność (8.30) do (8.17) otrzymano

$$L_{I\text{-}II}=\int \delta L=\int_0^{\varphi_4}\left(-6mgr\sin\alpha-2mgf\cos\alpha-4mgr\mu\cos\alpha-M_o+12mgr\right)d\varphi_4$$
$$=\left(-6mgr\sin\alpha-2mgf\cos\alpha-4mgr\mu\cos\alpha-M_o+12mgr\right)\varphi_4 \tag{8.31}$$
Przebytą drogę s od położenia I do II można zapisać jako
$$s=\varphi_1 r_1 \tag{8.32}$$
Z zależności kinematycznych (8.16) wiadomo że
$$\varphi_1=2\varphi_4 \tag{8.33}$$
Wstawiając zależność (8.33) do zależności (8.32) kąt obrotu
$$\varphi_4=\frac{s}{2r} \tag{8.34}$$
Podstawiając zależności (8.34), (8.31), (8.3) do (8.1) otrzymano
$$50m\omega_4^2r^2=\left(-6mgr\sin\alpha-2mgf\cos\alpha-4mgr\mu\cos\alpha-M_o+12mgr\right)\frac{s}{2r} \tag{8.35}$$
Szukana prędkość kątowa bryły nr 4 w położeniu II jest równa
$$\omega_4=\sqrt{\frac{\left(-6mgr\sin\alpha-2mgf\cos\alpha-4mgr\mu\cos\alpha-M_o+12mgr\right)s}{100mr^3}}\left[\frac{rad}{s}\right] \tag{8.36}$$

Zadanie 8.2. Dla mechanizmu płaskiego pokazanego na rysunku 1 określić wielkość prędkości punktu A, gdy z położenia I (położenie równowagi statycznej) do położenia II przebędzie on drogę s. Rozwiązać zadanie stosując zasadę równowartości energii kinetycznej i pracy, czyli podstawową zasadę energetyczną.

Dane:

$$\left.\begin{matrix}P_1\\P_2\\P_3\\P_4\end{matrix}\right\}[N]\text{ - ciężary brył}$$

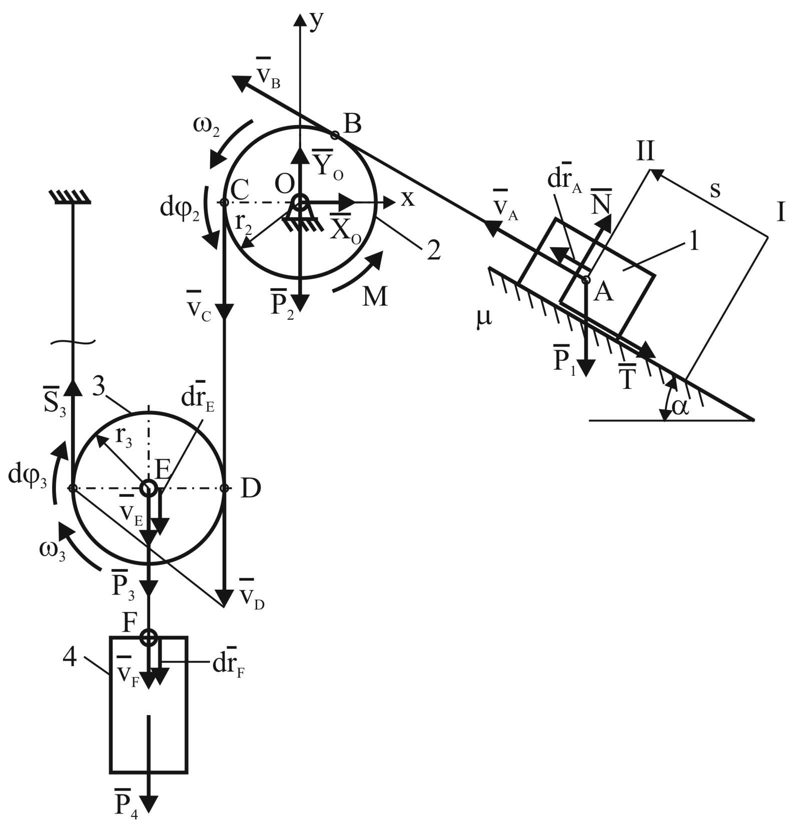
$r_2=r_3=r$ [m]

$M[Nm]$=const. - moment napędzający

$s[m]$ - droga przebyta przez punkt A z położenia I do II

$\alpha[rad]$

$\mu[-]$ - współczynnik tarcia suchego chropowatej równi



Rys. 8.3

Rozwiązanie. Na rysunku pokazano położenie analizowanego układu i zaznaczono charakterystyczne punkty. Podano również wektory prędkości liniowych tych punktów i prędkości kątowe odpowiednich brył. O i E – to środki mas odpowiednich brył.

Kinematyka układu: Bryła 1 wykonuje ruch postępowy, bryła 2 wykonuje ruch obrotowy, bryła 3 wykonuje ruch płaski, bryła 4 wykonuje ruch postępowy.

Załóżmy, że w położeniu II znamy prędkość punktu A, czyli v_A, wówczas z rozkładu prędkości poszczególnych punktów układu mamy, że:

$$v_B = v_A \tag{8.37}$$

$$\left.\begin{matrix} v_C = v_B = v_A \\ v_C = \omega_2 r_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow v_A = \omega_2 r_2 = \omega_2 r \Rightarrow \omega_2 = \frac{v_A}{r} \tag{8.38}$$

$$\left.\begin{matrix} v_D = v_C = v_A \\ v_D = 2\omega_3 r_3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow v_A = 2\omega_3 r_3 = 2\omega_3 r \Rightarrow \omega_3 = \frac{v_A}{2r} \tag{8.39}$$

$$v_E = \frac{1}{2} v_D = \frac{1}{2} v_A \quad \text{bo punkt G jest chwilowym środkiem prędkości bryły 3} \tag{8.40}$$

$$v_F = v_E = \frac{1}{2} v_A \tag{8.41}$$

Ponieważ wszystkie zależności kinematyczne można wyrazić w funkcji v_A, układ ma jeden stopień swobody.

Energia kinetyczna całego układu wynosi:

$$E = \sum_{i=1}^{n} E^{(i)} = E^{(1)} + E^{(2)} + E^{(3)} + E^{(4)} \tag{8.42}$$

Ponieważ położenie I jest położeniem równowagi statycznej układu to energia kinetyczna będzie wówczas $E_I=0$. Natomiast w położeniu II energia poszczególnych brył będzie określona z zależności:

$$\begin{cases} E^{(1)}=\frac{1}{2}m_1v_A^2 \\ E^{(2)}=\frac{1}{2}I_O^{(2)}\omega_2^2 \\ E^{(3)}=\frac{1}{2}m_3v_E^2+\frac{1}{2}I_E^{(3)}\omega_3^2 \\ E^{(4)}=\frac{1}{2}m_4v_F^2 \end{cases} \tag{8.43}$$

Momenty bezwładności wynoszą:

$$I_O^{(2)}=\frac{1}{2}m_2r_2^2=\frac{1}{2}\frac{P_2}{g}r_2^2=\frac{1}{2}\frac{P_2}{g}r^2 \tag{8.44}$$

$$I_E^{(3)}=\frac{1}{2}m_3r_3^2=\frac{1}{2}\frac{P_3}{g}r_3^2=\frac{1}{2}\frac{P_3}{g}r^2 \tag{8.45}$$

Uwzględniając (8.39)-(8.41), (8.44) i (8.45), wielkości (8.43) będą określone jako:

$$\begin{cases} E^{(1)}=\frac{1}{2}\frac{P_1}{g}v_A^2 \\ E^{(2)}=\frac{1}{4}\frac{P_2}{g}v_A^2 \\ E^{(3)}=\frac{3}{16}\frac{P_3}{g}v_A^2 \\ E^{(4)}=\frac{1}{8}\frac{P_4}{g}v_A^2 \end{cases} \tag{8.46}$$

Wstawiając do zależności (8.42) wielkości (8.46) otrzymujemy energię kinetyczną całego układu:

$$E=\frac{1}{2}\frac{P_1}{g}v_A^2+\frac{1}{4}\frac{P_2}{g}v_A^2+\frac{3}{16}\frac{P_3}{g}v_A^2+\frac{1}{8}\frac{P_4}{g}v_A^2=\frac{1}{16}\frac{v_A^2}{g}(8P_1+4P_2+3P_3+2P_4)=E(v_A)\ [J] \tag{8.47}$$

czyli energię tą wyrażamy w funkcji szukanej wartości prędkości v_A.

Aby określić pracę całkowitą wykonaną przez układ sił przy przemieszczeniu z położenia I do II najpierw określimy pracę elementarną całego układu sił, która wynosi:

$$\delta L=\sum_{i-1}^{n}\delta L^{(i)}=\delta L^{(1)}+\delta L^{(2)}+\delta L^{(3)}+\delta L^{(4)} \tag{8.48}$$

Prace elementarne wykonane przez siły działające na odpowiednie bryły będą określone jako:

$$\begin{cases} \delta L^{(1)}=\overline{P}d\overline{r}_A=(\overline{P}_1+\overline{N}+\overline{T})d\overline{r}_A=(-P_1\sin\alpha-T)dr_A \quad * \\ \delta L^{(2)}=M_Od\varphi_2=Md\varphi_2 \quad ** \\ \delta L^{(3)}=\overline{P}d\overline{r}_E+M_Ed\varphi_3=(\overline{P}_3+\overline{S}_3)d\overline{r}_E+S_3r_3d\varphi_3=(P_3-S_3)dr_E+S_3rd\varphi_3 \quad *** \\ \delta L^{(4)}=\overline{P}d\overline{r}_F=\overline{P}_4d\overline{r}_F=P_4dr_F \quad **** \end{cases} \tag{8.49}$$

gdzie :

* $\overline{P}$ - to suma geometryczna wszystkich sił działających na bryłę1 a $d\overline{r}_A$ to założone elementarne przesunięcie punktu A,

** M_O - to suma algebraiczna momentów sił określonych względem środka masy bryły 2 a $d\varphi_2$ to elementarny obrót tej bryły,

*** $\overline{P}$ - to suma geometryczna wszystkich sił działających na bryłę 3 a $d\overline{r}_E$ to założone elementarne przesunięcie punktu E, natomiast M_E - to suma algebraiczna momentów sił określonych względem środka masy bryły 3 a $d\varphi_3$ to elementarny obrót tej bryły,

**** $\overline{P}$ - to suma geometryczna wszystkich sił działających na bryłę 4 a $d\overline{r}_F$ to założone elementarne przesunięcie punktu F.

Znając kinematykę układu możemy określić elementarne przesunięcia i obroty jako:

$$d\varphi_2=\frac{dr_A}{r}, \quad d\varphi_3=\frac{dr_A}{2r} \qquad \text{- elementarne obroty brył} \tag{8.50}$$

$$dr_E=\frac{1}{2}dr_A, \quad dr_F=dr_E=\frac{1}{2}dr_A \qquad \text{- elementarne przesunięcia odpowiednich punktów} \tag{8.51}$$

Zależności siłowe:

$$N=P_1\cos\alpha \tag{8.52}$$

wynika to z równowagi sił działających na bryłę 1 na kierunku prostopadłym do równi.

$$T=\mu N=\mu P_1\cos\alpha \tag{8.53}$$

Uwzględniając zależności siłowe (8.52), (8.53) i kinematyczne (8.50), (8.51), prace elementarne wykonywane przez układy sił wyniosą:

$$\begin{cases} \delta L^{(1)}=-P_1(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)dr_A \\ \delta L^{(2)}=\dfrac{M}{r}dr_A \\ \delta L^{(3)}=\dfrac{1}{2}P_3dr_A \\ \delta L^{(4)}=\dfrac{1}{2}P_4dr_A \end{cases} \tag{8.54}$$

Stąd praca elementarna wykonana przez układ sił będzie:

$$\delta L=\left[-P_1(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)+\frac{M}{r}+\frac{1}{2}P_3+\frac{1}{2}P_4\right]dr_A \tag{8.55}$$

czyli jest ona funkcją przesunięcia elementarnego punktu A. Praca całkowita wykonana przez układ sił przy przejściu z położenia I do II, czyli przy przemieszczeniu punktu A o s będzie określona jako:

$$L_{I\text{-}II}=\int_0^s\delta L=\int_0^s\left[-P_1(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)+\frac{M}{r}+\frac{1}{2}P_3+\frac{1}{2}P_4\right]dr_A \tag{8.56}$$

$$L_{I\text{-}II}=\left[-P_1(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)+\frac{M}{r}+\frac{1}{2}P_3+\frac{1}{2}P_4\right]s\ [J] \tag{8.57}$$

Zasada równowartości energii kinetycznej i pracy określa, że:

$$E_{II}-E_I=L_{I\text{-}II} \tag{8.58}$$

gdzie:

E_{II} - energia kinetyczna w położeniu II (określona przez zależność (8.47)),

E_I - energia kinetyczna w położeniu I (E_I=0),

$L_{I\text{-}II}$ - praca całkowita wykonana przez układ sił przy przemieszczeniu z położenia I do II.

Z zasady równowartości energii kinetycznej i pracy wyznaczymy szukaną prędkość punktu A czyli v_A:

$$\frac{1}{16}\frac{v_A^2}{g}(8P_1+4P_2+3P_3+2P_4)=\left[-P_1(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)+\frac{M}{r}+\frac{1}{2}P_3+\frac{1}{2}P_4\right]s \Rightarrow$$

$$v_A=4\sqrt{\frac{-P_1(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)+\frac{M}{r}+\frac{1}{2}P_3+\frac{1}{2}P_4}{8P_1+4P_2+3P_3+2P_4}gs}\ \left[\frac{m}{s}\right] \tag{8.59}$$