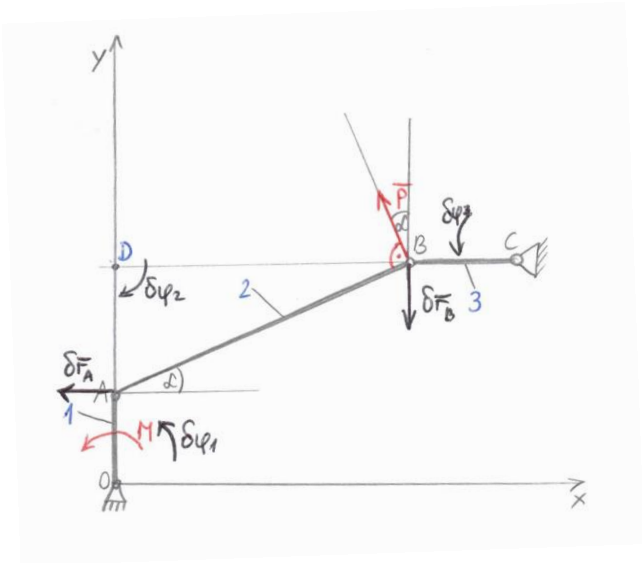
Zasada prac przygotowanych

Zad. 2, str. 143, tab. 8

Dane:
M [Nm]
OA = r [m]
AB = 3r [m]
BC = $\frac{3}{2}$r [m]
α [rad]
Szukane:
P = ?



Rozwiązanie:

a) Przyjmujemy układ współrzędnych na rysunku w nieruchomym punkcie, np. punkcie O. Rozpoczynamy od analizy, w jakim ruchu mogłyby się znajdować poszczególne bryły, gdyby ruch występował: bryła 1 – ruch obrotowy, bryła 2 - ruch płaski, bryła 3 – ruch obrotowy. Wprowadzamy wektory przesunięć przygotowanych, jak pokazano na rys. Ruch bryły 2 możemy analizować jako chwilowy ruch obrotowy wokół chwilowego środka obrotu. Szukamy więc położenia chwilowego środka obrotu, stosując metody poznane na kinematyce. Chwilowy środek obrotu bryły 2 znajduje się w punkcie D.

Zapisujemy wzór ogólny wynikający z zasady prac przygotowanych:

$$1)\quad \delta L = \sum_{i=1}^{n} \delta L_i = 0$$

$$2)\quad \delta L = M_O \delta\varphi_1 + M_D \delta\varphi_2 + M_C \delta\varphi_3 = 0$$

Uwzględniając jedynie układ sił pokazany na rys. równanie (2) przyjmuje formę:

$$3)\quad \delta L = M \delta\varphi_1 - P\cos\alpha \; BC \; \delta\varphi_3 = 0$$

W równaniu (3) mamy wartości dwóch wektorów przesunięć przygotowanych. Ponieważ układ brył stanowi łańcuch kinematyczny o jednym stopniu swobody, będziemy chcieli wszystkie interesujące nas wartości przesunięć przygotowanych wyrazić w funkcji tylko jednego przesunięcia przygotowanego, np. $\delta\varphi_1$. Musimy więc zapisać równania więzów kinematycznych narzuconych na przesunięcia przygotowane:

4) $\delta \bar{r}_A^{(1)} = \delta \bar{r}_A^{(2)}$

5) $\delta \varphi_1 \, AO = \delta \varphi_2 \, AD$

6) $AD = AB \sin\alpha = 3r \sin\alpha$

7) $\delta \varphi_1 \, r = \delta \varphi_2 \, 3r \sin\alpha$

8) $\delta \varphi_2 = \frac{\cancel{r}}{3\cancel{r} \sin\alpha} \delta \varphi_1 = \frac{1}{3 \sin\alpha} \delta \varphi_1$

9) $\delta \bar{r}_B^{(2)} = \delta \bar{r}_B^{(3)}$

10) $\delta \varphi_2 \, BD = \delta \varphi_3 \, BC$

11) $BD = AB \cos\alpha = 3r \cos\alpha$

12) $\delta \varphi_2 \, 3r \cos\alpha = \delta \varphi_3 \frac{3}{2} r$

13) $\delta \varphi_3 = \frac{2\cancel{r}}{\cancel{r}} \cos\alpha \, \delta \varphi_2 = 2 \delta \varphi_2 \cos\alpha$

14) $\delta \varphi_3 = 2\left(\frac{1}{3\sin\alpha} \delta \varphi_1\right) \cos\alpha = \frac{2}{3} ctg\alpha \, \delta \varphi_1$

Informację wynikającą z równania (14) podstawiamy do równania (3), otrzymujemy:

15) $\delta L = M \delta \varphi_1 - P \frac{3}{2} r \cos\alpha \left(\frac{2}{3} ctg\alpha \, \delta \varphi_1\right) = 0$

16) $\delta L = \left[M - P r \cos\alpha \, ctg\alpha\right] \delta \varphi_1 = 0$

Ponieważ dla różnych wartości wektora wirtualnego obrotu bryły 1 $\delta\varphi_1$:

17) $\delta \varphi_1 \neq 0$

musi być spełniony warunek z równania (16), wyrażenie w nawiasie kwadratowym przyrównujemy do 0:

18) $M - P r \cos\alpha \, ctg\alpha = 0$

Stąd:

19) $P = \frac{1}{r \cos\alpha \, ctg\alpha} M \quad [N]$

W ten sposób wyznaczyliśmy poszukiwaną wartość wektora siły P.