14. Równania stanu.

Istota algebraicznego odwzorowania nieliniowości opiera się na założeniu, iż *na* danym etapie rozwiązania, przy danym stopniu realizacji obciążenia, odkształcony układ zachowuje stan równowagi statycznej. Zatem dla układu dyskretnego można sformułować układ równań równowagi, który przedstawić można w formie *macierzowego równania sił rezydualnych*:

$$\mathbf{r}(\mathbf{u},\Lambda)=\mathbf{0}, \tag{170}$$

w którym **u** jest wektorem stanu, zawierającym składowe przemieszczeń węzłów struktury, odpowiadające jej aktualnej konfiguracji geometrycznej, Λ jest macierzą zawierającą parametry kontrolne odpowiadające aktualnemu poziomowi obciążenia, natomiast **r** jest *wektorem rezydualnym*, zawierającym niezrównoważone składowe sił, związane z aktualnym stanem deformacji układu.

Dla układów Clapeyrona wektor **r** dla ustalonej wartości parametru Λ definiowany jest jako gradient całkowitej energii potencjalnej $\Pi(\mathbf{u},\Lambda)$ układu:

$$\mathbf{r}=\frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{u}} \tag{171}$$

co wyraża, iż warunkiem równowagi statycznej rozważanego układu jest zerowy przyrost energii potencjalnej.
Równanie (170) można również przedstawiać w formie zależności:

$$\mathbf{p}(\mathbf{u})=\mathbf{f}(\mathbf{u},\Lambda) \tag{172}$$

gdzie **p** jest macierzą zawierającą siły wewnętrzne odpowiadające aktualnemu stanowi deformacji, natomiast **f** jest wektorem sił zewnętrznych, które również mogą zależeć od aktualnego stanu deformacji, co można przedstawić w formie równań:

$$\mathbf{p}=\frac{\partial U}{\partial\mathbf{u}}, \qquad \mathbf{f}=\frac{\partial P}{\partial\mathbf{u}} \tag{173}$$

gdzie P i U oznaczają odpowiednio energię sprężystą oraz pracę obciążeń zewnętrznych. Całkowitą energię potencjalną układu wyraża równanie:

$$\Pi = U - P \tag{174}$$

Macierz sztywności układu K odpowiadająca chwilowej, aktualnej konfiguracji układu definiowana jest jako pochodna wektora rezidualnego **r** względem składowych wektora stanu **u**:

$$\mathbf{K} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{u}} \tag{175}$$

Macierz odwrotna $\mathbf{K}^{-1}$ jest *macierzą podatności* układu. Wykluczając osobliwości odpowiadające punktom charakterystycznym ścieżki równowagi obie macierze są macierzami symetrycznymi.

Wyznaczając pochodną wektora rezidualnego **r** względem parametrów kontrolnych, można określić *macierz kontrolną*, nazywaną również *macierzą obciążeń*:

$$\mathbf{Q} = -\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{\Lambda}} \tag{176}$$

Z koncepcji na której oparte są zasady tworzenia nieliniowych algorytmów numerycznych, polegającej na etapowych zmianach konfiguracji struktury odpowiadających etapowemu przyrostowi obciążenia, wynika możliwość związania macierzy **u** oraz $\mathbf{\Lambda}$ z bezwymiarowym parametrem określającym stopień realizacji zadania, nazywanym *parametrem pseudo-czasu*:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)\,, \qquad \mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}(\mathrm{t}) \tag{177}$$

W algorytmach numerycznych dotyczących problemów nieliniowych, wszystkie składowe macierzy $\mathbf{\Lambda}$ wyraża się jako funkcje pojedynczego parametru λ, nazywanego *parametrem kontroli stanu*. Parametr ten jest miarą przyrostu obciążenia związanego - pośrednio lub bezpośrednio - z parametrem pseudo-czasu – t. Zatem równanie stanu (170) może być zapisane w postaci:

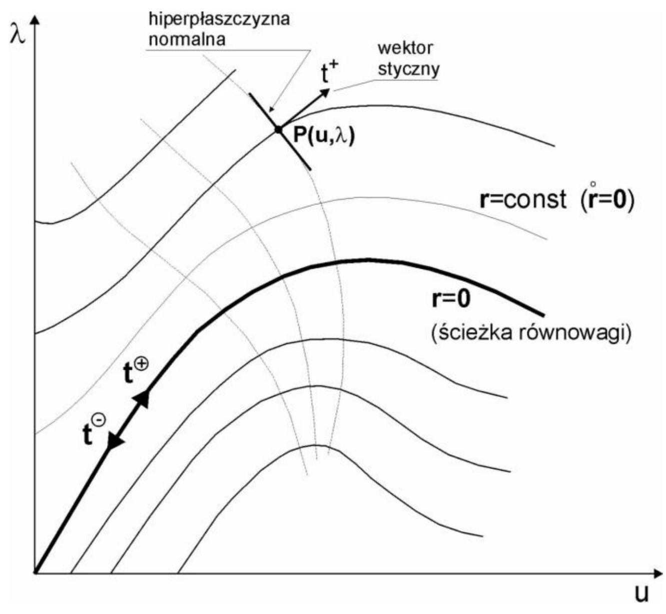
$$\mathbf{r}(\mathbf{u},\lambda)=\mathbf{0} \tag{178}$$

Jak już wspomniano, równanie sił rezidualnych (170) lub też jego sparametryzowana postać (178) odnosi się do układu o dowolnej, skończonej liczbie stopni swobody. Gdy liczba stopni swobody wynosi *n*, rozpatrywane zagadnienie nieliniowe zachodzi w *n*-wymiarowej przestrzeni stanu. Ilustracja graficzna zagadnienia możliwa jest w przypadku co najwyżej dwóch stopni swobody. Należy podkreślić, iż pomocne w interpretacji wykresy sporządzane w układzie: u-λ mogą również dotyczyć wybranych fragmentów modelu struktury, w szczególności jej wyselekcjonowanych węzłów, których przemieszczenia stanowią wielkości reprezentatywne dla rozważanego nieliniowego problemu.

Interpretacja graficzna może także dotyczyć pojedynczego parametru geometrycznego, zależnego w określony sposób od przemieszczeń całości struktury. Ograniczając formę reprezentacji graficznej do jednego stopnia swobody, można dla równania:

$$\mathbf{r}(\mathbf{u},\lambda)=\text{const.} \tag{179}$$

skonstruować wykresy w układzie u-λ. stanowiące rodzinę krzywych, odpowiadających stałym, skończonym wartościom wektora **r**. W szczególnym przypadku, gdy **r**=**0** **,** otrzymujemy krzywą, będącą ścieżką równowagi układu.



Przedstawiona na rysunku rodzina krzywych tworzy *pole przyrostowe*, określone równaniem różniczkowym:

$$\overset{\circ}{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$$

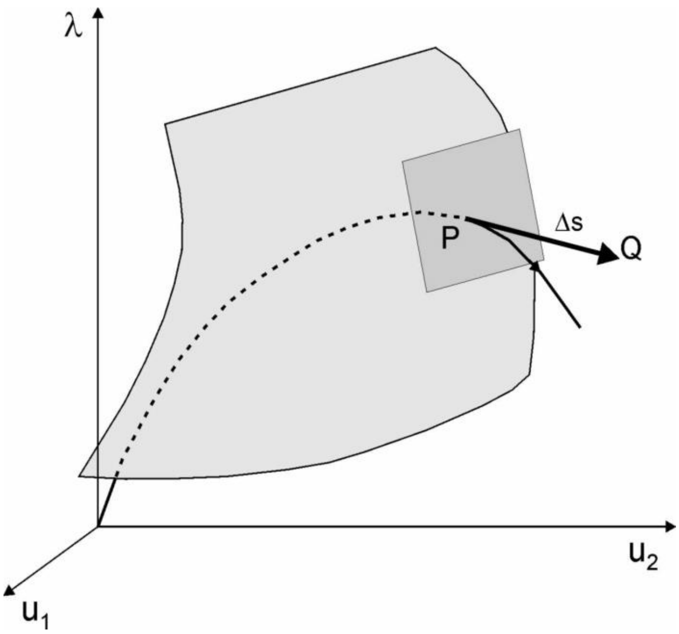
Parametr pseudo-czasu związany jest określoną zależnością z parametrem kontroli stanu λ. W ogólnym przypadku parametry te nie muszą być tożsame. Gdy przyjęte zostanie takie założenie, tj. gdy:

$$\lambda \equiv \mathrm{t} \tag{180}$$

wówczas pole przyrostowe określa równanie:

$$\mathbf{r}' = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda} = \mathbf{0} \tag{181}$$

Graficzna postać ścieżki równowagi dla układu o dwóch stopniach swobody może zostać przedstawiona w postaci:



15. Numeryczne metody rozwiązywania problemów nieliniowych.

Projektowanie struktur nośnych wymagające rozwiązywania problemów o charakterze nieliniowym z zastosowaniem metody elementów skończonych, wymaga określania przebiegu ścieżki równowagi rozpatrywanego układu. Staje się to osiągalne poprzez wyznaczenie punktów hiperprzestrzeni stanu, spełniających równanie sił rezydualnych. Wynik rozwiązania stanowią kombinacje parametrów stanu, którym odpowiadają kolejne konfiguracje geometryczne rozważanego układu zapewniając jego równowagę statyczną.

Jak wspomniano wcześniej, określenie ścieżki równowagi metodami bezpośrednimi nie jest możliwe bez znajomości prawa fizycznego określającego naturę deformacji rozpatrywanego układu, dla przyjętej geometrii i obciążenia.

Uzasadnia to celowość prowadzenia analiz wykorzystujących metody oparte na koncepcji, iż *przebieg rozwiązania ma charakter etapowy i składa się z określonej liczby stanów struktury.* Każdemu stanowi odpowiada pewna kombinacja zmieniających się w sposób proporcjonalny parametrów kontrolnych związanych z obciążeniem układu, wyrażanych poprzez pojedynczy parametr kontroli stanu λ. Każdemu stanowi struktury odpowiada punkt hiperprzestrzeni stanu, należący do ścieżki równowagi, a ściślej, oddalony od niej o dostatecznie mały dystans określony tolerancją, wynikającą z dokładności przyjętej metody.

Przejście od danego stanu do stanu kolejnego inicjowane jest przez zmianę parametru kontrolnego, któremu odpowiada nowa geometria struktury, określona przez nowy *wektor stanu*. Przejście to określane jest mianem: *krok przyrostowy*, lub *przyrost*. Przejście od danego stanu do stanu kolejnego wiąże się z koniecznością określenia nowej konfiguracji struktury, odpowiadającej nowemu położeniu równowagi statycznej. Faza ta stanowi istotę rozwiązania, a zbieżność otrzymanego wyniku z odpowiedzią układu rzeczywistego w istotnej mierze zależy od skuteczności stosowanego algorytmu numerycznego.

Znajdujące zastosowanie we wspomnianych algorytmach numeryczne metody określania kolejnych punktów ścieżki równowagi, podzielić można na dwie zasadnicze grupy:

- ***metody czysto przyrostowe (*****Ang**.: ***purely incremental method)*** zwane również ***metodami prognostycznymi (*****Ang**.: ***predictor only method),***

- ***metody korekcyjne (*****Ang**.:***corrective methods)***, nazywane również ***prognostyczno-korekcyjnymi (*****Ang**.: ***predictor-corrector) lub przyrostowo-iteracyjnymi (*****Ang**.: ***incremental-iterative methods).***

Pierwsze z wymienionych charakteryzują się ograniczoną dokładnością uzyskiwanych wyników oraz brakiem możliwości przekraczania punktów krytycznych.

W metodach korekcyjnych występuje faza iteracyjna, mająca na celu zmniejszenie błędu rozwiązania. Metody te umożliwiają również określanie punktów krytycznych na ścieżkach równowagi oraz dalsze awansowanie analizy do stanów odpowiadających konfiguracjom po przekroczeniu owych punktów.

Wspólną, podstawową cechą obydwu grup metod jest obecność fazy przyrostowej. W przypadku każdego, kolejnego przyrostu, przy przejściu ze stanu n do stanu n+1, wielkościami nie określonymi są zmiany:

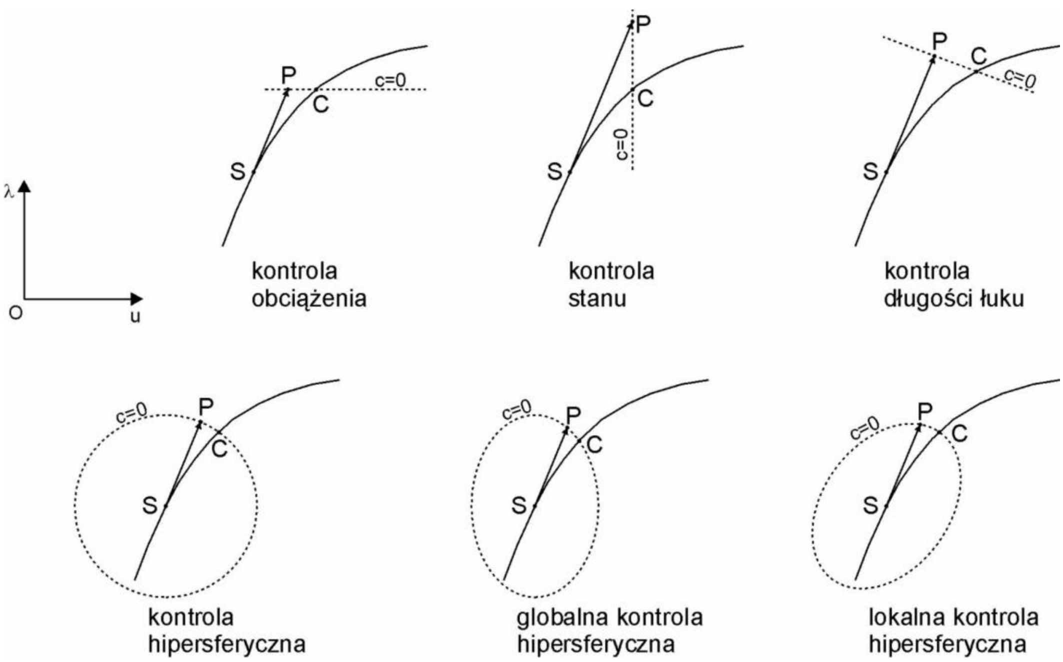
$$\Delta\mathbf{u}_{n} = \mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_{n} \quad \text{oraz} \quad \Delta\lambda_{n} = \lambda_{n+1} - \lambda_{n} \tag{182}$$

W celu ich zdefiniowania, formułuje się dodatkowe równanie, tzw. *równanie kontroli przyrostu*, zwane również *równaniem więzów*, wyrażane jako warunek:

$$c(\Delta\mathbf{u}_{n}, \Delta\lambda_{n}) = 0 \tag{183}$$

wynikający z ograniczeń określanych przez użytkownika. Równanie powyższe jest w istocie określeniem sposobu wyznaczania kolejnych kroków przyrostowych i wynika ze strategii przyjętej przez użytkownika.

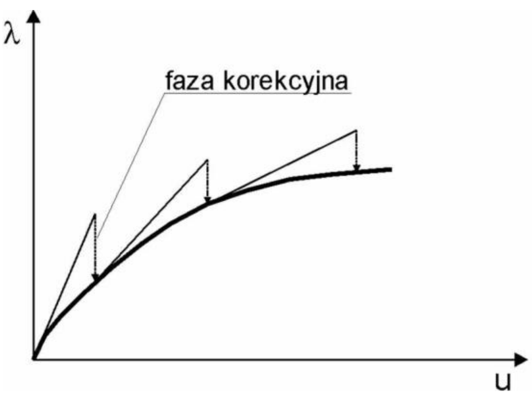
Z matematycznego punktu widzenia, równanie (183) jest równaniem hiperpowierzchni, której kształt, wymiary oraz zmiany tychże wymiarów w funkcji pseudo-czasu, zależą od wspomnianej strategii.

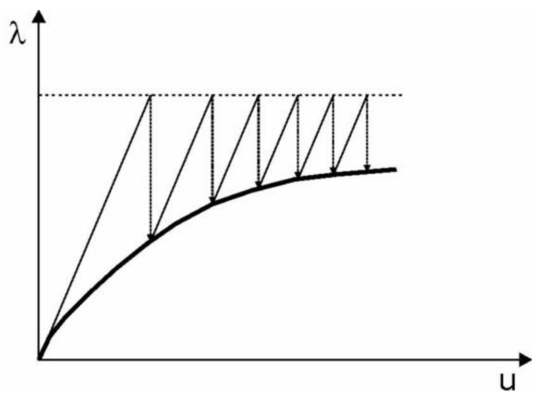


Najczęściej stosowanymi strategiami kontroli przyrostu są: kontrola długości łuku ***(**Ang.: **arc lenght control)*** sformułowana przez Riksa i Wempnera oraz kontrola hipersferyczna Crisfielda wraz z jej pochodnymi.

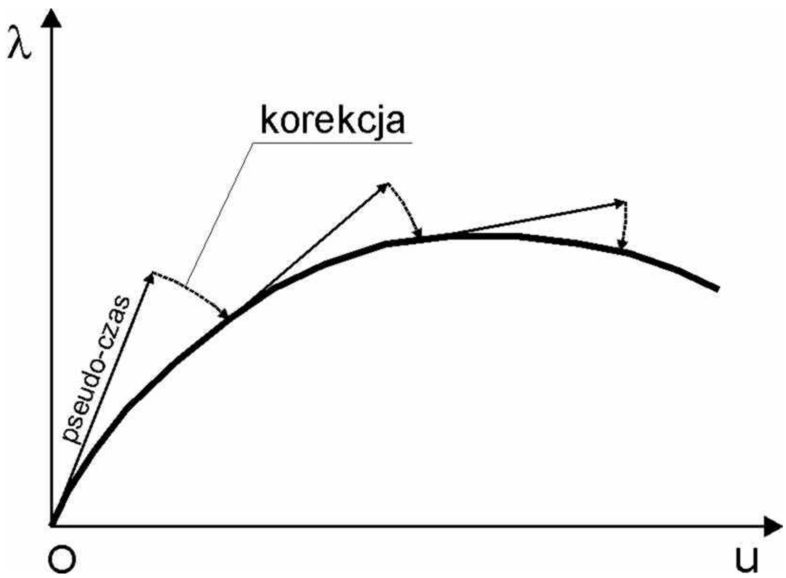
Faza korekcyjna ma na ogół charakter iteracyjny. Punktem wyjściowym iteracji jest punkt określony wcześniej w wyniku fazy prognostycznej. Z kolei w fazie korekcyjnej określane są kolejno punkty spełniające równanie kontroli przyrostu (183). Punkt znajdujący się dostatecznie blisko ścieżki równowagi przyjmowany jest jako punkt wyjściowy do kolejnej fazy prognostycznej.

Metody zawierające obie z wymienionych faz, określane są mianem *prognostyczno-korekcyjnych* lub *przyrostowo-iteracyjnych*.
Podstawową metodą stosowaną w większości programów komercyjnych jest ***metoda Newtona-Raphsona***, posiadająca szereg odmian, stanowiących ***rodzinę metod***.





Jak wynika z przedstawionych powyżej zależności, układ Newtona zawiera równanie więzów: **c=0**, co pozwala na przyjęcie dowolnej strategii kontroli przyrostu.



16. Zlinearyzowana analiza stateczności.

Jakkolwiek odwzorowanie numeryczne zaawansowanych, zakrytycznych stanów deformacji ustrojów cienkościennych wymaga posługiwania się analizami nieliniowymi opartymi na etapowym określaniu kolejnych punktów ścieżki równowagi, w praktyce (w szczególności w niektórych dyscyplinach, np. w technice lotniczej) spotykane są sytuacje, w odniesieniu do których analiza deformacji ustroju może ulec znacznemu uproszczeniu. Dotyczy to w szczególności struktur, w których utrata stateczności równoznaczna jest z ich zniszczeniem. Wówczas analiza deformacji w zakresie zakrytycznym staje się zbędna, a podstawowym zadaniem procedur numerycznych jest określenie obciążenia krytycznego oraz przybliżonej postaci utraty stateczności struktury. Tego rodzaju problemem numerycznym jest tzw. ***zlinearyzowana analiza stateczności***, określana również jako ***liniowa analiza wyboczeniowa*** (***linearized prebuckling***).

U podstaw owej analizy leży statyczne kryterium stateczności Eulera, zwane ***metodą energetycznych stanów przyległych (method of adjacent states)***. Metoda ta opiera się na rozważaniu skończonej liczby zaburzeń stanu równowagi, prowadzących do konfiguracji układu odpowiadających stanom energetycznym sąsiadującym ze stanem równowagi, tzw. ***stanom przyległym***. Badanie stabilności układu realizowane jest poprzez porównanie energii potencjalnych odpowiadających stanom przyległym z energią potencjalną stanu równowagi. Jeżeli w przypadku wszystkich stanów przyległych energia potencjalna jest wyższa niż w stanie równowagi, układ jest w stanie równowagi stałej. Jeżeli przynajmniej jeden z rozważanych stanów ma potencjał równy (mniejszy) potencjałowi stanu równowagi, to równowaga układu jest obojętna (chwiejna).

Zlinearyzowana analiza stateczności sprowadza się do rozwiązania problemu na wartości własne:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{z}_i = (\mathbf{K}_0 + \lambda \cdot \mathbf{K}_1) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{0}$$

Gdzie:

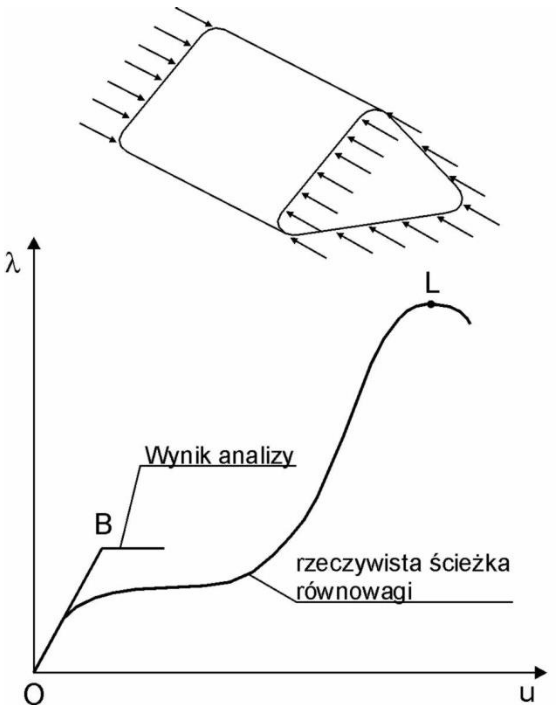
$\mathbf{K}_0$ – macierz sztywności wynikająca z właściwości materiału, określona dla stanu początkowego

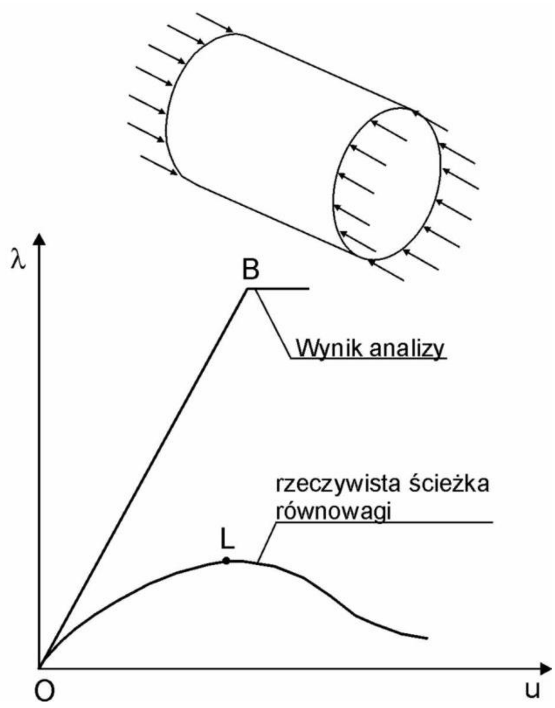
$\lambda \cdot \mathbf{K}_1$ - macierz sztywności wynikająca z aktualnej geometrii układu, zależna od parametru kontroli stanu (obciążenia) λ

z - wektor własny, określający postać utraty stateczności

Metoda sprowadza wszelkie deformacje, występujące przed osiągnięciem stanu krytycznego, do zagadnienia liniowego. Wynika stąd, iż wszelkie nieliniowości związane z deformacjami podkrytycznymi są pomijane, co może prowadzić do znaczących błędów rozwiązania. Może być stosowana wyłącznie w przypadku małych deformacji stanu podkrytycznego, wyłącznie dla materiałów liniowo-sprężystych.

Metoda nie odwzorowuje wpływu imperfekcji geometrycznych. Jej stosowanie odnosi się zatem wyłącznie do układów Clapeyrona.





Redystrybucja naprężeń

układ podatny na imperfekcje