

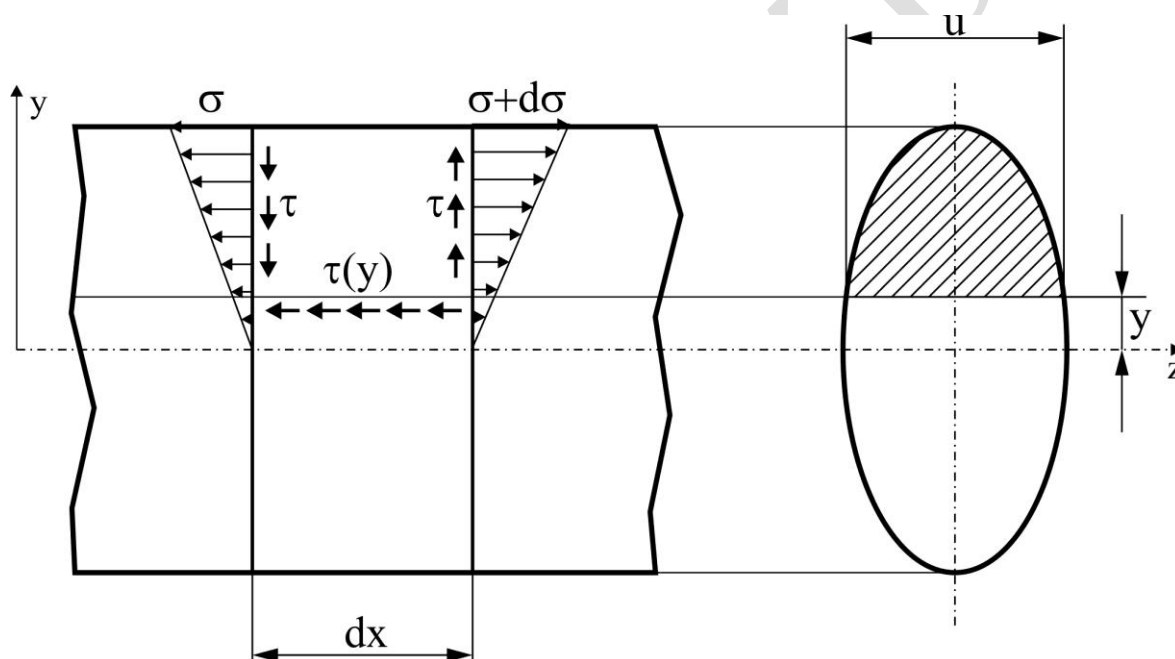
ROZDZIAŁ XIV – PODSTAWOWE PRZYPADKI WYTRZYMAŁOŚCI ZŁOŻONEJ

1) Zginanie z udziałem sił poprzecznych.

W dotychczasowych rozważaniach przyjmowaliśmy, że w belce obciążonej siłą poprzeczną występują naprężenia styczne, których średnia wartość wynosi:

$$\tau_{sr} = \frac{T}{A}$$

W celu bardziej dokładnego określenia rozkładu tych naprężeń, rozważamy równowagę elementu myślowo wyodrębnionego z belki dwiema płaszczyznami normalnymi do osi pręta, odległymi o dx oraz przekrojem równoległym do warstwy obojętnej:



Przyrost naprężenia normalnego $d\sigma$ występuje wówczas, gdy istnieje przyrost momentu gnącego, a zatem gdy występuje siła poprzeczna w danym przekroju. Zakładamy, że jest ona stała w obrębie odcinka dx .

Warunek równowagi rozpatrywanego elementu można sformułować następująco:

$$\int_y^{y_{max}} (\sigma + d\sigma) dA - \int_y^{y_{max}} \sigma dA - \tau(y) \cdot u \cdot dx = 0 \quad (1)$$

Stąd:

$$\tau(y) = \frac{1}{u \cdot dx} \int_y^{y_{max}} d\sigma dA \quad (2)$$

Związek pomiędzy przyrostem naprężenia normalnego a przyrostem momentu gnącego wynika ze wzoru (IX.16):

$$d\sigma = \frac{dM_g}{J_z} y$$

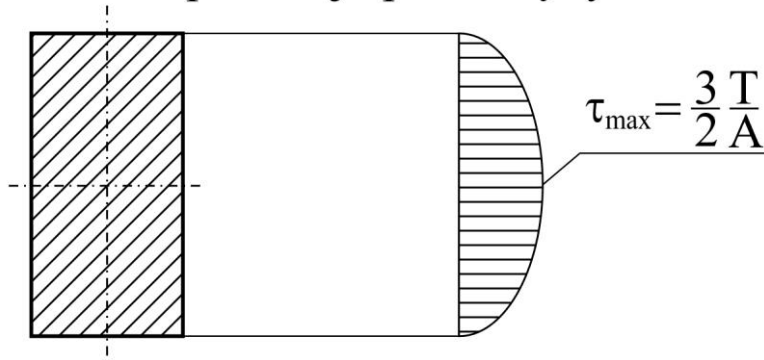
$$\tau(y) = \frac{1}{u \cdot J_z} \cdot \frac{dM_g}{dx} \int_y^{y_{max}} y dA \quad (3)$$

\uparrow \mathbf{T} \uparrow $\mathbf{S}_y^{y_{max}}{}_z$

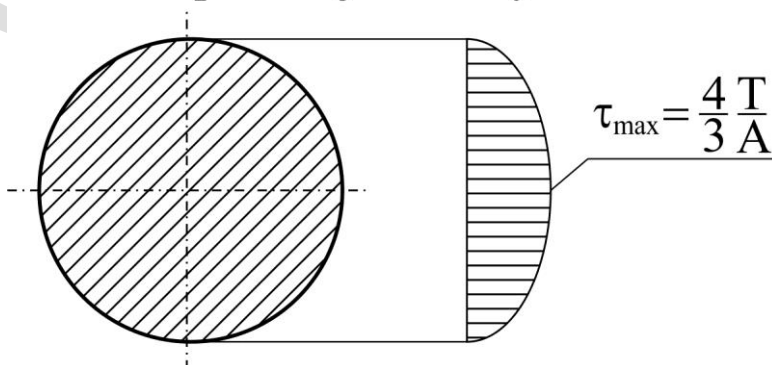
$$\tau(y) = \frac{T \cdot S_y^{y_{max}}{}_z}{J_z \cdot u}$$

(4)

Belka o przekroju prostokątnym:



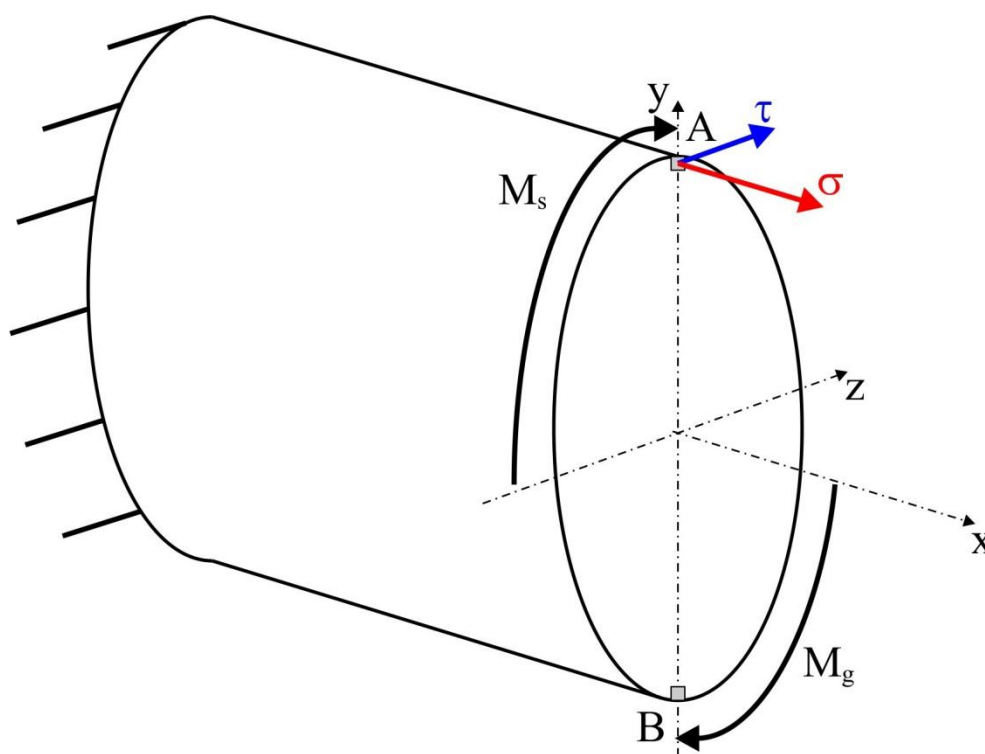
Belka o przekroju kołowym:



2) Zginanie i skręcanie.

W praktyce inżynierskiej często spotykane są ustroje poddawane równoczesnemu zginaniu i skręcaniu, np. wały maszynowe, zginane reakcjami łożysk, naciągami pasów, siłami międzyrębnymi i ciężarem własnym oraz momentem skręcającym powodującym powstawanie naprężeń stycznych.

Rozpatrujemy pręt o przekroju kołowym, poddany skręcaniu i zginaniu:

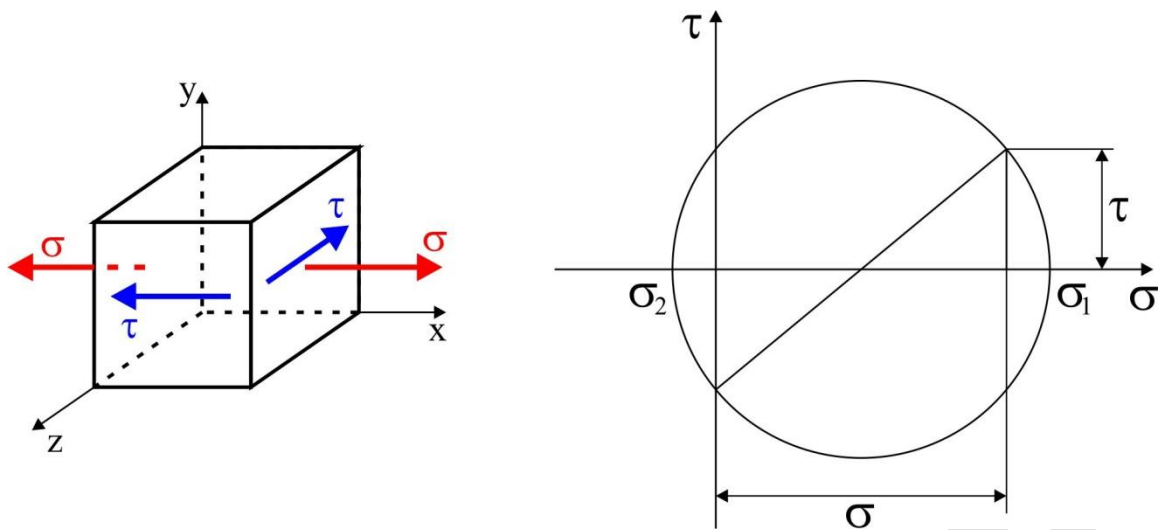


Wskutek działania momentu gnącego M_g w rozpatrywanym przekroju pręta pojawiają się naprężenia normalne σ , które przyjmą maksymalne wartości w punktach **A** i **B**, najbardziej oddalonych od warstwy obojętnej. Efektem występowania momentu skręcającego M_s są naprężenia styczne, które przyjmą maksymalną wartość we włóknach najbardziej oddalonych od środka przekroju.

$$\sigma = \frac{M_g}{W_z} ; \quad \tau = \frac{M_s}{W_o}$$

Przy równoczesnym działaniu momentów gnącego i skręcającego, najbardziej narażone są zatem punkty **A** i **B**.

Rozpatrujemy prostopadłościan elementarny, wyodrębniony wokół punktu **A**:



W prostopadłościanie powstaje płaski stan naprężenia, który można przedstawić za pomocą koła Mohra.

Wartości naprężeń głównych wynoszą:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad ; \quad \sigma_2 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

Stan naprężenia w rozpatrywanym punkcie jest stanem złożonym, zatem ocenę stopnia wyęczenia materiału należy oprzeć na odpowiedniej hipotezie wytrzymałościowej.

Naprężenia muszą zostać oznaczone zgodnie z przyjętą umową: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad ; \quad \sigma_2 = 0 \quad ; \quad \sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad (a)$$

Dla materiałów o jednakowych właściwościach na rozciąganie i ściskanie korzysta się na ogół z hipotez **H-M-H** oraz τ_{\max} .

Według hipotezy τ_{\max} :

$$\sigma_{red} = \sigma_1 - \sigma_3 = 2 \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq k_r \quad (5)$$

Według hipotezy **H-M-H**:

$$\sigma_{red} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \quad (6)$$

Po podstawieniu zależności (a):

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq k_r \quad (7)$$

W przypadku zginania ze skręcaniem powyższe wzory wygodnie jest wyrazić bezpośrednio jako funkcje momentu gnącego i momentu skręcającego.

Dla przekroju kołowego:

$$W = \frac{\pi r^3}{4} ; W_o = \frac{\pi r^3}{2} \rightarrow W_o = 2W$$

$$\text{Zatem: } \sigma = \frac{M_g}{W} ; \tau = \frac{M_s}{W_o} = \frac{M_s}{2W}$$

Po podstawieniu powyższych wielkości do wzorów (5) i (7):

$$\sigma_{red} = \sqrt{\left(\frac{M_g}{W}\right)^2 + 4\left(\frac{M_s}{2W}\right)^2} = \frac{\sqrt{M_g^2 + M_s^2}}{W} \leq k_r \quad - \text{wg. h. } \tau_{max} \quad (8)$$

$$\sigma_{red} = \sqrt{\left(\frac{M_g}{W}\right)^2 + 3\left(\frac{M_s}{2W}\right)^2} = \frac{\sqrt{M_g^2 + 0,75 \cdot M_s^2}}{W} \leq k_r \quad \text{wg. H - M - H} \quad (9)$$

Kombinacja momentów występująca w licznikach powyższych wyrażeń nazywana jest momentem zastępczym M_z .

$$M_z = \sqrt{M_g^2 + M_s^2} \quad - \text{wg } \tau_{max} \quad (10)$$

$$M_z = \sqrt{M_g^2 + 0,75 \cdot M_s^2} \quad - \text{wg H - M - H} \quad (11)$$

Po wprowadzeniu momentów zastępczych, obliczenia naprężeń zredukowanych dla prętów o przekrojach kołowych poddanych zginaniu i skręcaniu, sprowadzają się do zastosowania wzoru:

$$\sigma_{red} = \frac{M_z}{W} \leq k_g \quad (12)$$