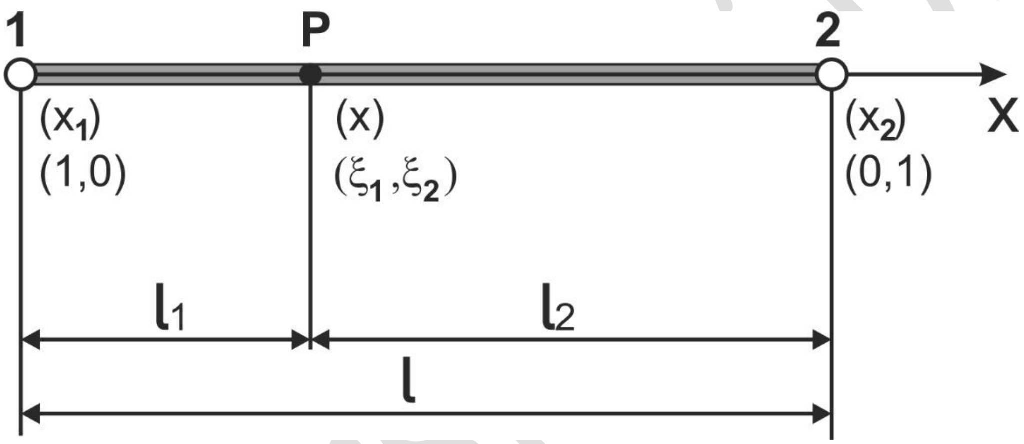
9. Naturalne współrzędne elementów.

W przypadku zapisu właściwości elementów w kartezjańskim układzie współrzędnych oraz przy przechodzeniu z jednego układu do innego, istnieje niekiedy problem powstawania równań źle uwarunkowanych, co prowadzi do macierzy bliskich osobliwym.
Aby tego uniknąć, wprowadza się tzw. współrzędne naturalne, które pozwalają odnieść geometrię elementu do wielkości lokalnych, związanych z węzłami, niezależnie od ich orientacji i położenia w przestrzeni.
Stosując współrzędne naturalne, opisuje się położenie punktu w obszarze elementu za pomocą pewnej liczby wielkości bezwymiarowych, przyjmujących wartości z przedziału <0,1>, przy czym wartość „1” występuje tylko odpowiednio w węzłach elementu.
Zastosowanie współrzędnych naturalnych pozwala na uproszczenie procesów całkowania, dzięki prostemu rozwiązywaniu całek niezależnie od kształtu elementu. Ma to bardzo istotne znaczenie przy wyznaczaniu macierzy sztywności, gdzie liczba całek jest zwykle znaczna.

Rozważamy element jednowymiarowy, pokazany na rysunku:



Zamiast określać położenie punktu P współrzędną x, można to zrealizować poprzez użycie dwu wielkości bezwymiarowych:

$$\xi_1 = \frac{l_1}{l}\ ;\ \ \xi_2 = \frac{l_2}{l} \tag{147}$$

Należy zauważyć że:

$$\xi_1 + \xi_2 = 1 \tag{148}$$

oraz że:

w węźle 1: $\xi_1 = 1\ ;\ \ \xi_2 = 0$

w węźle 2: $\xi_1 = 0\ ;\ \ \xi_2 = 1$

Z równania (148) wynika, że tylko jedna współrzędna liniowa jest niezależna.

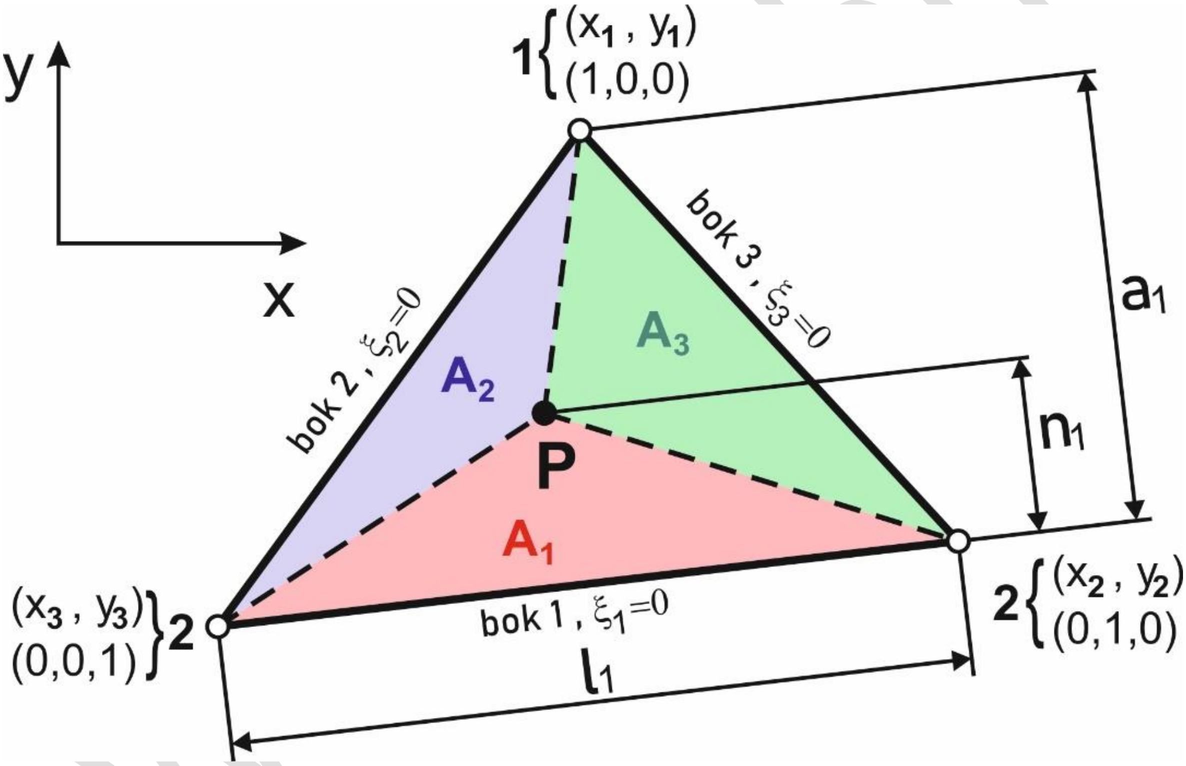
Związek pomiędzy ξ_1 , ξ_2 oraz x, przy uwzględnieniu równania (148) można przedstawić w postaci:

$$\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \tag{149}$$

Zależność odwrotna:

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & x_2 \\ 1 & -x_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \tag{150}$$

Następnie rozpatrujemy element trójkątny:



Położenie punktu P określamy trzema współrzędnymi naturalnymi, nazywanymi *współrzędnymi powierzchniowymi*:

$$\xi_1 = \frac{A_1}{A}\ ;\ \ \xi_2 = \frac{A_2}{A};\ \ \xi_3 = \frac{A_3}{A} \tag{151}$$

Współrzędne te można wyrazić jako:

$$\xi_i = \frac{A_i}{A} = \frac{\frac{n_i l_i}{2}}{\frac{a_i l_i}{2}} = \frac{n_i}{a_i} \tag{152}$$

Współrzędne powierzchniowe związane są zależnością:

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1 \tag{153}$$

ponadto:

w węźle 1: $\xi_1 = 1\ ;\ \ \xi_2 = \xi_3 = 0$

w węźle 2: $\xi_2 = 1\ ;\ \ \xi_1 = \xi_3 = 0$

w węźle 3: $\xi_3 = 1\ ;\ \ \xi_2 = \xi_3 = 0$

oraz:

wzdłuż boku 1: $\xi_1 = 0$

wzdłuż boku 2: $\xi_2 = 0$

wzdłuż boku 3: $\xi_3 = 0$

Związek macierzowy pomiędzy współrzędnymi naturalnymi i kartezjańskimi (x,y) po uwzględnieniu równania (153) ma postać:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} \tag{153}$$

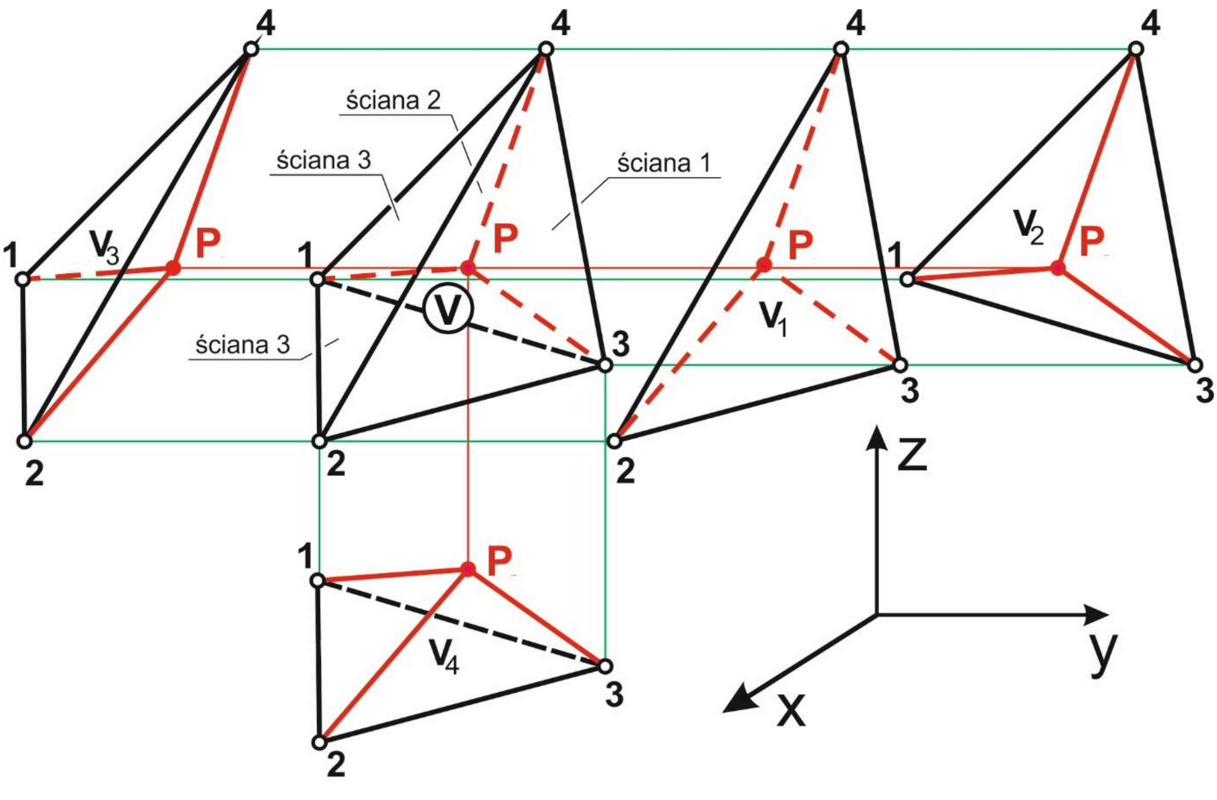
Zależność odwrotna:

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & x_{32} & x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ y_{31} & x_{13} & x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ y_{12} & x_{21} & x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \tag{154}$$

gdzie na przykład:

$$y_{23} = y_2 - y_3$$

Z kolei rozpatrujemy przestrzenny element czworościenny:



Punkt P w obszarze elementu określamy współrzędnymi naturalnymi, nazywanymi *współrzędnymi objętościowymi*:

$$\xi_1 = \frac{V_1}{V}\ ;\ \ \xi_2 = \frac{V_2}{V};\ \ \xi_3 = \frac{V_3}{V};\ \xi_4 = \frac{V_4}{V} \tag{155}$$

Powiązane są one zależnością:

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 = 1 \tag{156}$$

węzeł	Współrzędne kartezjańskie	Współrzędne naturalne
1	x y z	1, 0, 0, 0
2	x y z	0, 1, 0, 0
3	x y z	0, 0, 1, 0
4	x y z	0, 0, 0, 1

oraz:

w węźle 1: $\xi_1 = 1\ ;\ \ \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = 0$

w węźle 2: $\xi_2 = 1\ ;\ \ \xi_1 = \xi_3 = \xi_4 = 0$

w węźle 3: $\xi_3 = 1\ ;\ \ \xi_1 = \xi_2 = \xi_4 = 0$

w węźle 3: $\xi_4 = 1\ ;\ \ \xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$

a także:

na ścianie 1: $\xi_1 = 0$

na ścianie 2: $\xi_2 = 0$

na ścianie 3: $\xi_3 = 0$

na ścianie 4: $\xi_4 = 0$

Poszczególne ściany mają numery przeciwległych węzłów.
Współrzędne x, y, z wyrażają się poprzez współrzędne objętościowe za pomocą związku:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{bmatrix} \qquad (156)$$