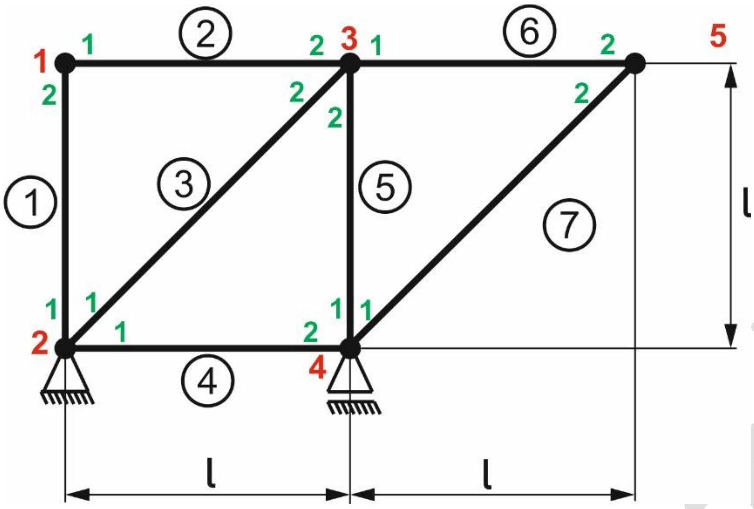
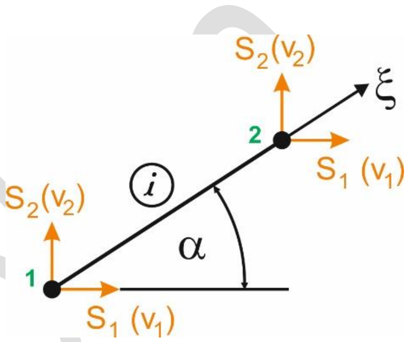
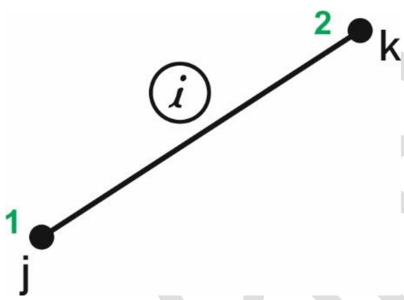
PRZYKŁAD:

Zbudować macierz sztywności kratownicy pokazanej na rysunku, przy założeniu, że $\frac{EA}{l} = const.$ Oraz że w każdym węźle działają dwie siły składowe i pojawiają się dwie składowe przemieszczeń





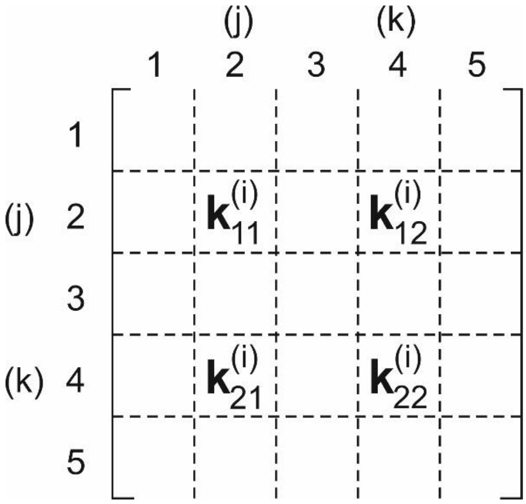
Rozważamy i-ty element kratownicy:



1,2 – numery lokalne ; j,k – numery globalne

$$\boldsymbol{k}_i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{k}_{11}^{(i)} & \boldsymbol{k}_{12}^{(i)} \\ \boldsymbol{k}_{21}^{(i)} & \boldsymbol{k}_{22}^{(i)} \end{bmatrix}$$

Zbudujemy macierz **K** układu wykorzystując zasadę superpozycji, sumując udziały sztywnościowe poszczególnych elementów. W tym celu każdą z macierzy składowych $\mathbf{k}_i$ należy zapisać w formacie macierzy globalnej, zgodnie ze schematem:



Mamy zatem:

$$\boldsymbol{K}_1 = \frac{EA}{l}\begin{array}{c c}
\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} & \\
\begin{bmatrix}
\boldsymbol{k}_{22}^{(1)} & \boldsymbol{k}_{21}^{(1)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\boldsymbol{k}_{12}^{(1)} & \boldsymbol{k}_{11}^{(1)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}
\end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}
\end{array}$$

$$\boldsymbol{K}_2 = \frac{EA}{l}\begin{array}{c c}
\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} & \\
\begin{bmatrix}
\boldsymbol{k}_{11}^{(2)} & \mathbf{0} & \boldsymbol{k}_{12}^{(2)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\boldsymbol{k}_{21}^{(2)} & \mathbf{0} & \boldsymbol{k}_{22}^{(2)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}
\end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}
\end{array}$$

$$\boldsymbol{K}_3 = \frac{EA}{l}\begin{array}{c c}
\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} & \\
\begin{bmatrix}
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \boldsymbol{k}_{11}^{(3)} & \boldsymbol{k}_{12}^{(3)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \boldsymbol{k}_{21}^{(3)} & \boldsymbol{k}_{22}^{(3)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}
\end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}
\end{array}$$

$$\boldsymbol{K}_4 = \frac{EA}{l}\begin{array}{c} \begin{matrix}\;1 & \;\;2 & \;\;\;3 & \;\;\;4 & \;\;\;5\end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{k}_{11}^{(4)} & \mathbf{0} & \boldsymbol{k}_{12}^{(4)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{k}_{21}^{(4)} & \mathbf{0} & \boldsymbol{k}_{22}^{(4)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$$

$$\boldsymbol{K}_5 = \frac{EA}{l}\begin{array}{c} \begin{matrix}\;1 & \;\;2 & \;\;\;3 & \;\;\;4 & \;\;\;5\end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{k}_{22}^{(5)} & \boldsymbol{k}_{21}^{(5)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{k}_{12}^{(5)} & \boldsymbol{k}_{11}^{(5)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$$

$$\boldsymbol{K}_6 = \frac{EA}{l}\begin{array}{c} \begin{matrix}\;1 & \;\;2 & \;\;\;3 & \;\;\;4 & \;\;\;5\end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{k}_{11}^{(6)} & \mathbf{0} & \boldsymbol{k}_{11}^{(6)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{k}_{21}^{(6)} & \mathbf{0} & \boldsymbol{k}_{22}^{(6)} \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$$

$$\boldsymbol{K}_7 = \frac{EA}{l}\begin{array}{c} \begin{matrix}\;1 & \;\;2 & \;\;\;3 & \;\;\;4 & \;\;\;5\end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{k}_{11}^{(7)} & \boldsymbol{k}_{12}^{(7)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{k}_{21}^{(7)} & \boldsymbol{k}_{22}^{(7)} \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$$

Dla elementu prętowego, w którego węzłach występują dwie składowe siły i dwa przemieszczenia, macierz sztywności ma ogólną postać (przykład – rozdział 4):

$$\boldsymbol{k_{i,l}} = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Przykładowo zatem:

$$\boldsymbol{K}_4 = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix}
0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & \cdot & 1 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & -1 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & \cdot & -1 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 1 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

Ponadto, z równania (51) wynika, że: $\boldsymbol{k}_i = \boldsymbol{C}_i \boldsymbol{k}_{i,l} \boldsymbol{C}_i^T$

Z kolei:

$$\boldsymbol{C}_i = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & s & c \end{bmatrix} \tag{e}$$

Gdzie $c := \cos\alpha$; $s := \sin\alpha$.

Stąd:

$$\boldsymbol{C}_i^T = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & s & c \end{bmatrix}$$

Zatem ostatecznie:

$$\boldsymbol{k}_i = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & cs^2 \end{bmatrix}$$

Uwzględniając geometrię rozważanego układu i wynikające z niej wartości „c" i „s" oraz dokonując superpozycji:

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}_1 + \boldsymbol{K}_2 + \boldsymbol{K}_3 + \boldsymbol{K}_4 + \boldsymbol{K}_5 + \boldsymbol{K}_6 + \boldsymbol{K}_7$$

Otrzymujemy macierz sztywności w postaci:

$$\boldsymbol{K} = \frac{EA}{l}\left[\begin{array}{cccccccccccccccc}
1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & -1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & \vdots & 0 & -1 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \vdots & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \vdots & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \vdots & -1 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\
0 & -1 & \vdots & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \vdots & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\
-1 & 0 & \vdots & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \vdots & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \vdots & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \vdots & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \vdots & -1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \vdots & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\
0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & -1 & \vdots & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \vdots & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\
\cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & -1 & 0 & \vdots & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \vdots & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \vdots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}
\end{array}\right]$$

Powyższa macierz jest macierzą osobliwą i powinna zostać zmodyfikowana warunkami brzegowymi. Wówczas równanie dla układu przyjmuje postać:

$$\begin{bmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \\ R_{2x} = 0 \\ R_{2y} = 0 \\ R_{3x} \\ R_{3y} \\ R_{4x} \\ R_{4y} = 0 \\ R_{5x} \\ R_{5y} \end{bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{1x} \\ r_{1y} \\ r_{2x=0} \\ r_{2y} = 0 \\ r_{3x} \\ r_{3y} \\ r_{4x} = 0 \\ r_{4y} \\ r_{5x} \\ r_{5y} \end{bmatrix}$$

Oznaczając przez **K'** zmodyfikowaną macierz sztywności, powyższe równanie można zapisać w formie skróconej:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{K'} \cdot \boldsymbol{r}$$

Zatem:

$$\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{K'})^{-1} \cdot \boldsymbol{R}$$