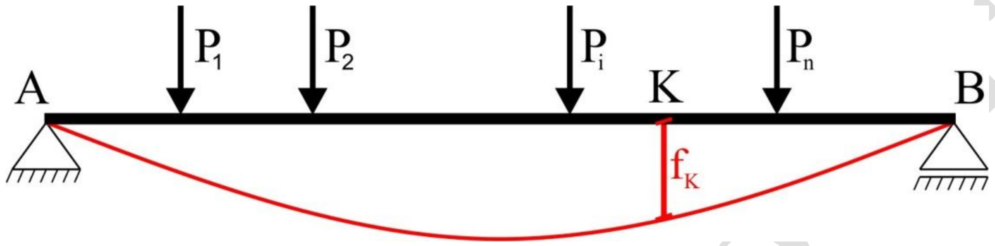
6) Metoda Maxwella-Mohra.

Obliczanie przemieszczeń belek za pomocą tw. Castigliano możliwe jest w przypadku układów prostych, o mało skomplikowanych obciążeniach. W przypadku układów złożonych, metoda ta jest zbyt pracochłonna. Znaczne uproszczenie obliczeń można uzyskać wprowadzając pewną jej modyfikację.

Rozpatrujemy dowolny układ Clapeyrona, reprezentowany przez belkę spoczywającą na dwóch podporach, obciążoną siłami $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$, $\mathbf{P_3}$,…, $\mathbf{P_i}$,…, $\mathbf{P_n}$. Wielkością szukaną jest ugięcie $\mathbf{f_K}$ belki w punkcie **K**.



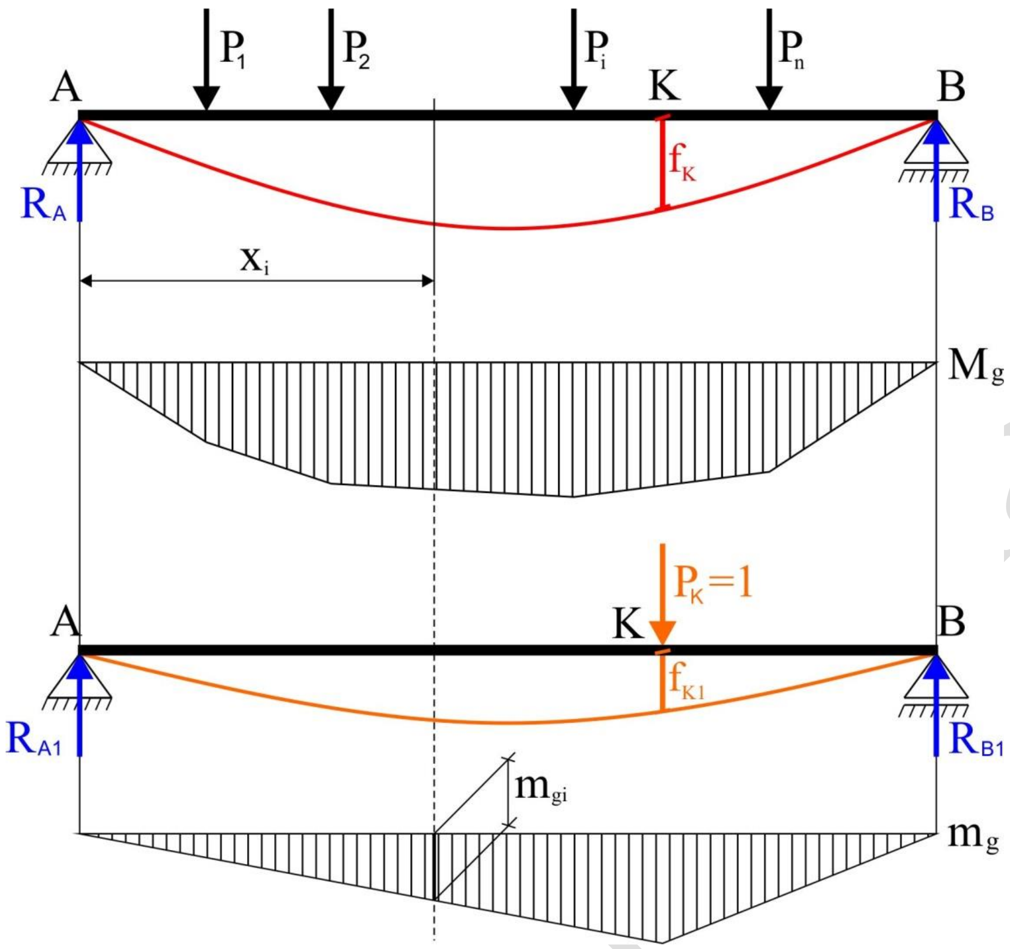
Aby zastosować twierdzenie Castigliano, konieczne jest wprowadzenie w punkcie **K** siły $\mathbf{P_K=0}$. Następnie należy wyznaczyć reakcje więzów i sformułować wyrażenia na momenty gnące dla każdego kolejnego przedziału belki. Ugięcie $\mathbf{f_K}$ wyznaczamy jako pochodną cząstkową energii sprężystej **V** belki względem siły $\mathbf{P_K}$, podstawiając rzeczywistą wartość siły $\mathbf{P_K}$.

$$f_K = \left(\frac{\partial V}{\partial P_K}\right)\Big|_{P_K=0}$$

Ten sam tok rozumowania przeprowadzamy, stosując zasadę superpozycji:

Rozpatrujemy układ pokazany na powyższym rysunku. Wyznaczamy wyrażenia określające momenty gnące w każdym kolejnym przedziale ciągłości. Energia sprężysta w przedziale i-tym wynosi:

$$V_i = \int_{L_i} \frac{M_{gxi}^2 dx_i}{2EJ_z} \quad ; \quad L_i - długość\ i - tego\ przedziału\ belki$$



Następnie rozpatrujemy tę samą belkę, obciążoną jedynie siłą $\mathbf{P_K}$, przyłożoną w punkcie **K** belki, przy czym $\mathbf{P_K=1}$.

W dowolnym przekroju belki, określonym współrzędną $\mathbf{x_i}$, wartość momentu gnącego wynosi $\mathbf{m_{gi}}$. Wobec tego, jeżeli siła $\mathbf{P_K}$ posiada dowolną wartość, zamiast wartości jednostkowej, moment gnący w tym przekroju wynosi $\boldsymbol{m_{gi} \cdot P_K}$.

Jeżeli do układu wyjściowego wprowadzona zostanie siła $\mathbf{P_K}$ o dowolnej wartości, to moment gnący w przekroju określonym współrzędną $\mathbf{x_i}$ wyniesie:

$$\boldsymbol{M_{gi} + m_{gi} \cdot P_K}$$

Energia sprężysta w przedziale i-tym wyniesie:

$$V_i = \int_{L_i} \frac{1}{2EJ_z} \left(M_{gi} + m_{gi} \cdot P_K\right)^2 dx_i$$

Energia sprężysta całej belki jest sumą energii wszystkich jej przedziałów. Zgodnie z twierdzeniem Castigliano, ugięcie $\mathbf{f_K}$ wynosi:

$$f_K = \frac{\partial V}{\partial P_K} = \sum_{i=1}^{n} \left[\int\limits_{L_i} \frac{1}{EJ_z} \left(M_{gi} + m_{gi} \cdot P_K \right) \cdot m_{gi} \cdot dx_i \right]$$

Ponieważ w rzeczywistości siła $P_K=0$, ostatecznie otrzymujemy:

$$f_K = \sum_{i=1}^{n} \left[\int\limits_{L_i} \frac{1}{EJ_z} \left(M_{gi} \cdot m_{gi} \right) dx_i \right]$$

Ogólna postać wyrażenia dla belki jednoprzedziałowej o długości L jest następująca:

$$\boxed{\boldsymbol{f_K = \int\limits_L \frac{M_g \cdot m_g^{(K)}}{EJ_z} dx}} \qquad Wzór\ Maxwella - Mohra \tag{32}$$

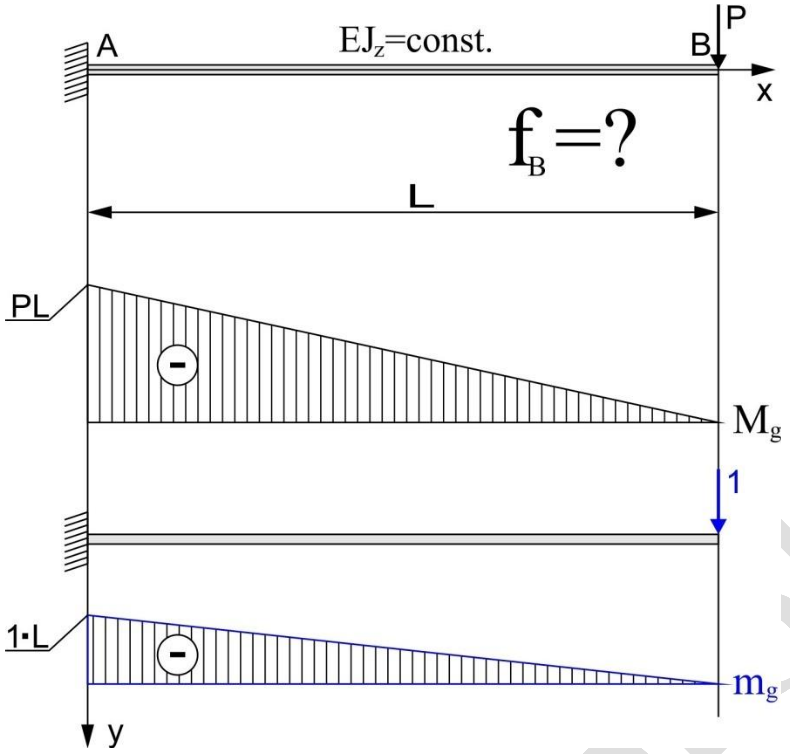
$m_g^{(K)}$ – moment gnący spowodowany siłą jednostkową przyłożoną w punkcie **K**.

W ogólnym przypadku, dla belki poddanej działaniu obciążeń złożonych, wzór Maxwella-Mohra przyjmuje postać:

$$f_K = \int\limits_L \frac{M_g \cdot m_g}{EJ_z} dx + \int\limits_L \frac{N \cdot n}{EA} dx + \int\limits_L \frac{M_s \cdot m_s}{GJ_O} dx + \int\limits_L \frac{\alpha \cdot T \cdot t}{GA} dx \tag{33}$$

W przypadku zginania z udziałem sił poprzecznych wzór (33) ogranicza się do członów, w których występują momenty gnące oraz siły tnące. W przeważającej większości przypadków człon od sił tnących jest pomijany, zatem do wyznaczania odkształceń belek zginanych używa się na ogół wzoru Maxwella-Mohra w postaci (32).

Przykład:



$$f_B = \int_L \frac{M_g \cdot m_g^{(B)}}{EJ_z}$$

$$M_g = -P \cdot x$$
$$m_g^{(B)} = -1 \cdot x$$

$$f_B = \frac{1}{EJ_z}\int_0^L (-P \cdot x)(-1 \cdot x)dx = \frac{P}{EJ_z}\left|\frac{x^3}{3}\right|_0^L = \frac{PL^3}{3EJ_z}$$

7) Twierdzenie Wereszczagina.

Całki we wzorze Maxwella-Mohra w większości przypadków obciążeń można obliczać przez zastąpienie ich iloczynem dwóch prostych czynników.

Załóżmy, że mamy obliczyć wyrażenie:

$$\int_L M_g m_g^{(K)} dx \qquad (a)$$

Funkcja $\mathbf{M_g}$ wyrażana jest w postaci wykresu momentów gnących. Podobnie, funkcję $\mathbf{m_g^{(K)}}$ można wyrazić w formie wykresu momentów gnących od jednostkowej siły, odpowiadającej wyznaczanemu przemieszczeniu $\mathbf{f_K}$. Wykres ten zazwyczaj składa się z odcinków prostych i w danym przedziale może być opisany równaniem:

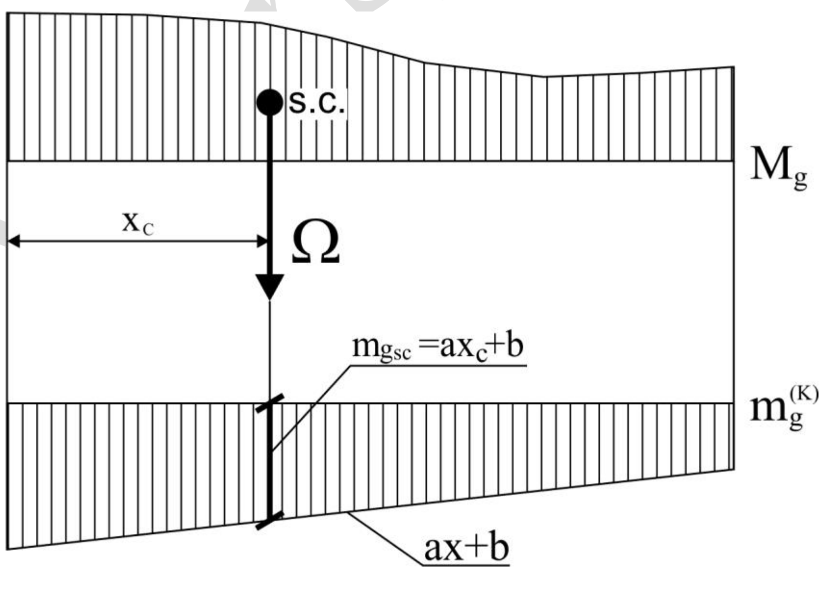
$$y = a \cdot x + b \qquad (b)$$

Po wstawieniu (b) do (a) otrzymujemy:

$$\int_L M_g m_g^{(K)} dx = \int_L M_g (a \cdot x + b) dx = a \underbrace{\int_L M_g \cdot x \cdot dx}_{\text{Moment statyczny pola } \Omega} + b \underbrace{\int_L M_g dx}_{\Omega \text{ - pole wykresu m.g.}} \qquad (c)$$

$$\Omega = \int_L M_g dx \qquad (d)$$

$$\int_L M_g \cdot x \cdot dx = \Omega \cdot \mathrm{x_c} \;\; ; \;\; \mathrm{x_c} - \text{wsp. środka ciężkości pola } \Omega \qquad \text{(e)}$$



Po podstawieniu (d) i (e) do (c) otrzymujemy:

$$\int_L M_g m_g^{(K)} dx = a \cdot \Omega \cdot \mathrm{x_c} + \mathrm{b} \cdot \Omega = \Omega(\mathrm{a} \cdot \mathrm{x_c} + \mathrm{b}) \tag{f}$$

$$a \cdot x_c + b = m_{gsc} \tag{g}$$

Po podstawieniu (g) do (f) otrzymujemy:

$$\boxed{\int_L M_g m_g^{(K)} = \Omega \cdot \mathrm{m_{gsc}}} \qquad Tw.\ A.N.Wereszczagina\ (1924) \tag{34}$$