7.2.3. Elementy płyty

Metodę elementów skończonych zastosowano z powodzeniem do obliczania płyt. Używano przy tym różnego rodzaju elementów, najczęściej jednak prostokątnych i trójkątnych.

Zgodnie z teorią płyt cienkich odkształcenia są określane przez funkcje ugięć i jej pochodne. Z tego względu, naturalnymi niejako parametrami w węzłach (kinematycznymi stopniami swobody) są przemieszczenia liniowe (ugięcie) i kąty obrotu przekrojów (kąty nachylenia stycznych do powierzchni odkształconej).

W tablicy 7.2 zestawiono niektóre, stosowane elementy płytowe. Zanim przystąpimy do ich omówienia, wróćmy na chwilę do sprawy doboru wielomianów jako składników funkcji kształtu.

Oprócz wcześniej podanych warunków funkcje te powinny przedstawiać geometrycznie niezmienniczy opis pola przemieszczeń względem różnie zorientowanych układów współrzędnych. W przypadku wielomianów nie powinny one zawierać składników uprzywilejowanych, czyli powinny być geometrycznie izotropowe. Można to osiągnąć posługując się trójkątem Pascala (rys. 7.17) i wybierać składniki wielomianu tak, aby nie pominąć składnika symetrycznego. Gdybyśmy np. mieli użyć wielomianu stopnia trzeciego do zbudowania funkcji kształtu elementu o ośmiu parametrach, wówczas w grupie składników stopnia trzeciego możemy pominąć jednocześnie x^3 i y^3 lub x^2y i xy^2.

Po tej dygresji zajmijmy się omówieniem elementów z tablicy 7.2. Na wstępie przypomnijmy, że np. symbol w oznacza ugięcie, $w_{,x}$ pochodną cząstkową powierzchni ugięcia względem x, $w_{,y}$ pochodną cząstkową względem y, $w_{,n}$ pochodną w kierunku normalnym do krawędzi elementu.

Rys. 7.17

Element pierwszy ma 9 stopni swobody. Dla uzyskania funkcji kształtu zastosowano wielomian stopnia trzeciego, który ma 10 składników.

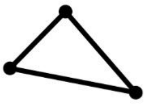
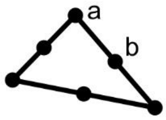
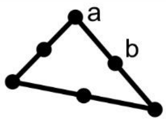
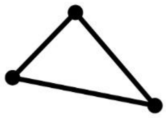
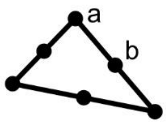
Możliwe są dwie postacie funkcji spełniającej warunek geometrycznej izotropii:

$$w = q_1+q_2x+q_3y+q_4x^2+q_5y^2+q_6x^3+q_7x^2y+q_8xy^2+q_9y^3, \tag{7.87}$$

lub

$$w = q_1+q_2x+q_3y+q_4x^2+q_5xy+q_6y^2+q_7x^3+q_8(x^2y+xy^2)+q_9y^3 \tag{7.88}$$

Postać pierwsza z uwagi na brak składnika xy nie zapewnia wymagań stałej wartości odkształceń przy skręcaniu i w rezultacie prowadzi do macierzy sztywności elementu przesztywnionego.

NR	ELEMENT	PARAMETRY WĘZŁOWE	LICZBA STOPNI SWOBODY	STOPIEŃ WIELO-MIANU	DOSTO-SOWANY
1		$w \quad w_{,x} \quad w_{,y}$	**9**	**3**	NIE
2		a: $w \quad w_{,x} \quad w_{,y}$ b: $w_{,n}$	**12**	**3**	TAK
3		a: $w \quad w_{,x} \quad w_{,y}$ b: $w \quad w_{,n}$	**15**	**4**	NIE
4		$w \quad w_{,x} \quad w_{,y}$ $w_{,xx} \quad w_{,xy} \quad w_{,yy}$	**18**	**5**	TAK
5		a: $w \quad w_{,x} \quad w_{,y}$ b: $w_{,xx} \quad w_{,xy} \quad w_{,yy}$ $w_{,n}$	**25**	**5**	TAK
6		$w \quad w_{,x} \quad w_{,y}$	**12**	**4**	NIE
7		$w \quad w_{,x} \quad w_{,y}$ $w_{,n}$	**16**	**5**	TAK

$$1$$
$$x \qquad y$$
$$x^2 \qquad xy \qquad y^2$$
$$x^3 \qquad x^2y \qquad xy^2 \qquad y^3$$
$$x^4 \qquad x^3y \qquad x^2y^2 \qquad xy^3 \qquad y^4$$
$$x^5 \qquad x^4y \qquad x^3y^2 \qquad x^2y^3 \qquad xy^4 \qquad y^5$$

Trójkąt Pascala

Postać druga daje dla niektórych położeń trójkąta względem układu współrzędnych osobliwą macierz przy przejściu od przemieszczeń uogólnionych do parametrów węzłowych. Można tego uniknąć wprowadzając tzw. współrzędne powierzchniowe. Będziemy o nich mówili w dalszych rozważaniach.

Parametrami węzłowymi w omawianym elemencie są przemieszczenia liniowe i kątowe. Ciągłość wzdłuż boków sąsiednich elementu powinna dotyczyć obu rodzajów przemieszczeń. Zgodność przemieszczeń liniowych jest zapewniona. Zmieniają się one według krzywej stopnia trzeciego, a w każdym z dwóch węzłów związanych z danym bokiem są po dwa parametry (ugięcie i kąt nachylenia wzdłuż boku).Te cztery parametry jednoznacznie określają parabolę trzeciego stopnia. Brak jest zgodności odnośnie do nachylenia stycznej w kierunku normalnej do boku trójkąta. Kąt ten zmienia się według krzywej stopnia drugiego, a odpowiadają mu tylko dwa parametry, po jednym w każdym węźle. Dwa parametry, jak wiemy, nie określają jednoznacznie paraboli. Omawiany element jest więc elementem niedostosowanym. Mimo to używano go z dobrymi rezultatami.

Niezgodność nachylenia stycznej w kierunku normalnej usunięto, wprowadzając w dodatkowych węzłach na środku boków po jednym parametrze w postaci pochodnej normalnej (element drugi w tablicy 7.2). Ogólna liczba parametrów zwiększyła się do 12, co przy 10 składnikach wielomianu stopnia trzeciego wymagało wprowadzenia dwóch wewnętrznych stopni swobody w sposób analogiczny, jak dla elementu tarczy o 18 stopniach swobody.

Element trzeci jest znowu niedostosowany. Przy zachowaniu zgodności ugięć brak jest zgodności nachylenia stycznej w kierunku normalnej do boków. Ugięcia opisane są krzywą stopnia czwartego, kąty nachylenia natomiast trzeciego. Z linią ugięć wzdłuż boku trójkąta związanych jest pięć parametrów, trzy ugięcia i dwa kąty nachylenia stycznej w narożach. Te pięć parametrów jednoznacznie określa krzywą stopnia czwartego. Z linią kątów nachylenia związane są trzy parametry; pochodne normalne w trzech węzłach danego boku. Trzy parametry, jak wiemy, nie wyznaczają jednoznacznie krzywej stopnia trzeciego.

Sprawdzenie klasyfikacji pozostałych elementów w tablicy 7.2 pozostawiamy Czytelnikowi.

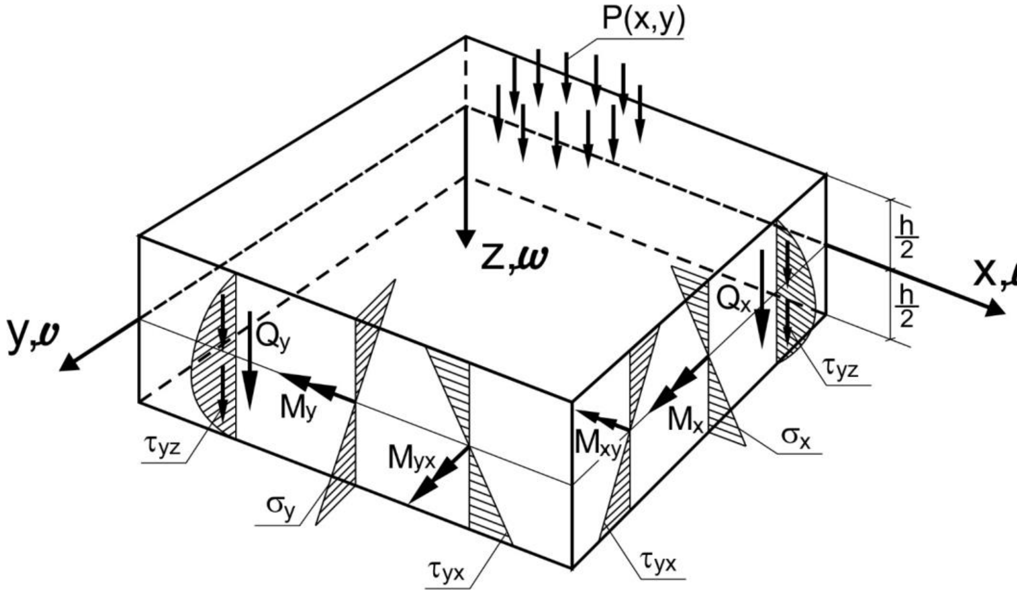
Ograniczona objętość książki nie pozwala na pełne wyprowadzenie macierzy sztywności dla każdego z przedstawionych wyżej elementów. Podamy więc ogólny sposób postępowania i zilustrujemy go przykładem.

Rozważać będziemy płytę cienką. Oznaczenia i dodatnie zwroty poszczególnych wielkości pokazano na rys. 7.18.

Przypomnijmy główne założenia i związki téorii płyt.

Założenia kinematyczne:

$$w(x, y, z) = w(x, y, 0) = w(x, y),$$



Rys. 7.18

$$u = -z\,\frac{\partial w}{\partial x} = -zw_{,x}\,, \tag{7.89}$$

$$v = -z\,\frac{\partial w}{\partial y} = -zw_{,y}\,.$$

Pomija się wpływ naprężeń σ_z.

Z powyższych związków wynika, że:

– płaszczyzna środkowa płyty nie doznaje odkształceń (poza ugięciami),

– prosta normalna do płaszczyzny środkowej przed wygięciem, pozostaje prostopadła do płaszczyzny wygiętej,

– pomija się wpływ sił poprzecznych na odkształcenia.

Niezerowe składowe odkształcenia można po uwzględnieniu (7.89) przedstawić w postaci:

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} \end{bmatrix} = -z \begin{bmatrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ 2w_{,xy} \end{bmatrix} = -z\,\mathbf{c}\,, \tag{7.90}$$

tutaj:

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} w_{,xx} \\ w_{,yy} \\ 2w_{,xy} \end{bmatrix} \tag{7.91}$$

jest wektorem, którego składowymi są poszczególne krzywizny powierzchni odkształconej płyty.

Równanie konstytutywne dla anizotropowego materiału sprężystego będzie miało postać:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ & E_{22} & E_{23} \\ \text{symetr.} & & E_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{E}\,\mathbf{e}. \tag{7.92}$$

Jednostkowe napięcia, którymi są momenty zginające i skręcające, odpowiadające wektorowi (7.90) zapisujemy jako:

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma\, z\, dz. \tag{7.93}$$

Po uwzględnieniu (7.92) i (7.90) mamy:

$$\mathbf{m} = -\int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} \mathbf{E}\,\mathbf{c}\,z^2\, dz = -\frac{h^3}{12}\mathbf{E}\,\mathbf{c}. \tag{7.94}$$

Dla materiału izotropowego macierz **E** określona jest wzorem:

$$\mathbf{E} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}.$$

Napięcia można w tym przypadku przedstawić w postaci:

$$\begin{aligned} M_x &= -D(w_{,xx} + \nu w_{,yy}), \\ M_y &= -D(w_{,yy} + \nu w_{,xx}), \\ M_{xy} &= -D(1+\nu)\, w_{,xy}, \end{aligned} \tag{7.95}$$

gdzie:

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}. \tag{7.96}$$

Układ równań (7.95) zapisujemy macierzowo:

$$\mathbf{m} = -\mathbf{D}\,\mathbf{c}, \tag{7.97}$$

tutaj:

$$\mathbf{D} = D\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}. \tag{7.98}$$

Dysponujemy już wszystkimi równaniami teorii płyt niezbędnymi do uzyskania macierzy sztywności. Procedura będzie analogiczna do stosowanej w przypadku elementu tarczy.

Przyjmujemy opis powierzchni odkształconej elementu płyty w zależności od założonych funkcji (zwykle wielomianów odpowiedniego stopnia) oraz przyjętych uogólnionych przemieszczeń

$$w = \mathbf{w}^T \mathbf{q}, \tag{7.99}$$

gdzie:

- $\mathbf{w}$ – wektor zawierający składniki wielomianu,
- $\mathbf{q}$ – wektor uogólnionych przemieszczeń.

Możliwy jest także taki opis powierzchni odkształconej:

$$w = (\mathbf{U}\,\mathbf{w})^T\,\mathbf{v}, \tag{7.100}$$

tutaj:

- $\mathbf{U}$ – macierz zależna od przyjętego wektora $\mathbf{w}$,
- $\mathbf{v}$ – wektor grupujący wszystkie rzeczywiste parametry węzłowe dla danego elementu.

Należy podkreślić, że znalezienie macierzy $\mathbf{U}$ na podstawie założonego wektora $\mathbf{w}$ jest możliwe tylko w bardzo prostych przypadkach. W ogólnym przypadku macierz $\mathbf{U}$ uzyskuje się przez rozpisanie układu równań:

$$\mathbf{v} = \mathbf{G}^T\mathbf{q}, \tag{7.101}$$

podstawiając do (7.99) i jego pochodnych współrzędne węzłów. Po odwróceniu (7.101) otrzymujemy:

$$\mathbf{q} = (\mathbf{G}^{-1})^T\mathbf{v}, \tag{7.102}$$

czyli (por. (7.81, (7.59))

$$\mathbf{U} = \mathbf{G}^{-1}.$$

Różniczkując równanie powierzchni odkształconej elementu otrzymujemy wekt - (7.91) w jednej z dwóch następujących postaci:

– po zróżniczkowaniu (7.99)

$$c = B_q q, \tag{7.103}$$

– natomiast na podstawie (7.100)

$$c = B v, \tag{7.104}$$

gdzie:

$$B_q = \begin{bmatrix} w^T_{,xx} \\ w^T_{,yy} \\ 2w^T_{,xy} \end{bmatrix}, \tag{7.105}$$

oraz

$$B = B_q U^T \tag{7.106}$$

Siły wewnętrzne obliczamy ze wzoru (7.97) podstawiając wzory (7.103) lub (7.104). Jeżeli wykorzystamy wzór (7.103), wówczas otrzymamy:

$$m = -D B_q q, \tag{7.107}$$

jeżeli (7.104), wtedy

$$m = -D B v. \tag{7.108}$$

Uogólnione siły zewnętrzne Q odpowiadające uogólnionym przemieszczeniom q, albo rzeczywiste siły S odpowiadające parametrom węzłowym v, wyznaczamy z równania prac:

$$v^T S = q^T Q = \int_V e^T \sigma dV, \tag{7.109}$$

albo

$$v^T S = q^T Q = -\int_A c^T m\, dA, \tag{7.110}$$

gdzie: V – objętość, A – pole powierzchni elementu.

Znak minus w równaniu (7.110) wynika stąd, że dodatnim momentom odpowiadają ujemne krzywizny.

Podstawiając do (7.110) wzory (7.104) i (7.107) lub (7.108) otrzymujemy:

$$Q = k_q q. \tag{7.111}$$

$$S = k v. \tag{7.112}$$

gdzie macierze sztywności elementu wyrażają się jako:

$$\mathbf{k}_q = \int_A \mathbf{B}_q^T \mathbf{D} \mathbf{B}_q \, dA, \tag{7.113}$$

$$\mathbf{k} = \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, dA. \tag{7.114}$$

Związek pomiędzy macierzami $\mathbf{k}_q$, $\mathbf{k}$ jest podany wzorem (7.66).