ROZDZIAŁ XII – PRZEMIESZCZENIA BELEK – METODY ENERGETYCZNE

1) Układy Clapeyrona.

Podstawą wielu metod obliczania przemieszczeń belek i rozwiązywania układów statycznie niewyznaczalnych są twierdzenia dotyczące energii sprężystej. Metody te oparte są na zasadzie zachowania energii.

Rozważania ograniczamy do ustrojów sprężystych, spełniających następujące założenia:

- Materiał zachowuje się zgodnie z prawem Hooke'a,

- W odniesieniu do sił wewnętrznych i odkształceń obowiązuje zasada superpozycji,

- Temperatura ustroju jest stała,

- W trakcie procesu odkształcania podpory nie ulegają niezależnym od obciążenia przemieszczeniom i nie ma takich podpór, których reakcje pojawiają się dopiero po pewnym określonym odkształceniu ustroju.

Układy takie noszą nazwę układów **Clapeyrona**.

Wprowadzamy oznaczenia:

V_P – wartość, o jaką zmienia się energia potencjalna obciążenia zewnętrznego
V – przyrost energii potencjalnej odkształcenia (przyrost energii sprężystej)
L_P – praca sił zewnętrznych
L – praca sił wewnętrznych

Z zasady zachowania energii wynika, że:

$$V_P = V \tag{1}$$

Jednocześnie wiadomo, że miarą zmniejszania się energii potencjalnej jest praca sił zewnętrznych:

$$L_P = V_P \tag{2}$$

Wiadomo również, że miarą przyrostu energii sprężystej jest praca sił wewnętrznych:

$$L = -V \tag{3}$$

Powyższe wielkości są różnych znaków, ponieważ siły wewnętrzne przeciwdziałają odkształceniu.

Uwzględniając związki (2) i (3), równanie (1) można zapisać w postaci:

$$L_P + L = 0 \tag{4}$$

Z równań (1) i (2) wynika również, że:

$$\boxed{V = L_P} \tag{5}$$

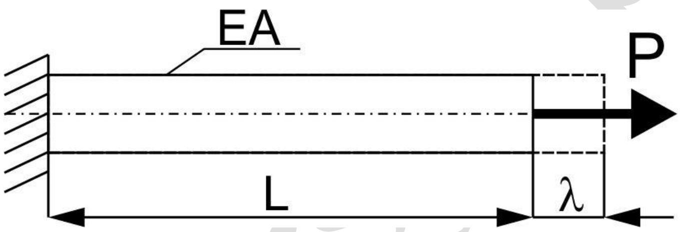
<u>Tw. Clapeyrona:</u>

Praca sił zewnętrznych jest miarą energii potencjalnej obciążenia przekształcającej się w energię sprężystą.

2) Energia sprężysta w prętach prostych.

Z przedstawionego rozumowania wynika, że ilość energii sprężystej jest funkcją sił zewnętrznych działających na ciało.

Rozpatrujemy pręt prosty, poddany rozciąganiu:



Ze wzoru (VI.8) wynika, że jednostkowa energia potencjalna ma wartość:

$$V_j = \frac{1}{2} \cdot \sigma \cdot \varepsilon = \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{A} \cdot \frac{\lambda}{L} = \frac{1}{2} \cdot P \cdot \lambda \cdot \frac{1}{A \cdot L} \tag{6}$$

Objętość pręta wynosi:

$$v = A \cdot L \tag{7}$$

Całkowita energia sprężysta, nagromadzona w pręcie rozciąganym wynosi:

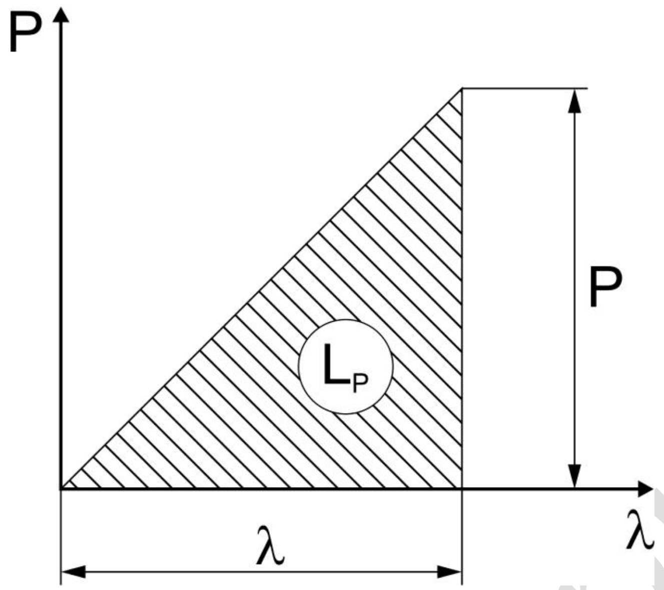
$$V = V_j \cdot v = \frac{1}{2} \cdot P \cdot \lambda \cdot \frac{1}{A \cdot L} \cdot (A \cdot L) \tag{8}$$

Zatem:

$$V = \frac{1}{2} \cdot P \cdot \lambda \tag{9}$$

Ponieważ $\lambda = \frac{PL}{EA} \rightarrow P^2 = \frac{\lambda^2 \cdot E^2 \cdot A^2}{L^2}$, zatem:

$$\boxed{V = \frac{P^2 \cdot L}{2EA} = \frac{EA \cdot \lambda^2}{2L}} \tag{10}$$



Podobne rozumowanie można przeprowadzić dla pręta o przekroju kołowym, poddanego skręcaniu momentem $\mathbf{M_S}$:

Całkowita energia sprężysta wyniesie:

$$V = L_P = \frac{M_S \cdot \varphi}{2} \quad ; \quad \varphi - kąt\ skręcenia \tag{11}$$

Z kolei: $\varphi = \frac{M_S \cdot L}{GJ_O} \rightarrow M_S^2 = \frac{\varphi^2 \cdot G^2 \cdot J_O^2}{L^2}$, zatem:

$$\boxed{V = \frac{M_S^2 \cdot L}{2GJ_O} = \frac{GJ_O \cdot \varphi^2}{2L}} \tag{12}$$

W przypadku ogólnym, kiedy obciążenia prętów są zmienne:

Dla pręta rozciąganego: $V = \int_L \frac{N_x^2 dx}{2EA}$ (13)

Dla pręta skręcanego: $V = \int_L \frac{M_{Sx}^2 dx}{2GJ_O}$ (14)

N_x, M_{sx} – lokalna wartość obciążenia w dowolnie określonym przekroju

W przypadku pręta poddanego czystemu zginaniu:

$$V = \frac{M_g^2 \cdot L}{2EJ_z} \tag{15}$$

Dla ogólnego przypadku zginania:

$$V = \int_L \frac{M_{gx}^2 \cdot dx}{2EJ_z} \tag{16}$$

Wzory (15) i (16) określają energię sprężystą wynikającą z działania naprężeń normalnych. Oprócz nich, w ciele gromadzi się energia od naprężeń stycznych, wywołanych działaniem sił poprzecznych.

Można wykazać, że dla odcinka o długości **L** belki poddanej działaniu siły tnącej **T**, energia sprężysta wynosi:

$$V = \int_L \frac{\alpha \cdot T_x^2 \cdot dx}{2GA} \ , \tag{17}$$

gdzie **α** jest funkcją zależną od kształtu przekroju poprzecznego belki:

$$\alpha = \frac{A}{J_z^2} \int_A \frac{\left(S_y^{y_{max}}{}_z\right)^2}{b_y^2} dA \tag{18}$$

Wielkości $S_y^{y_{max}}{}_z$ i b_y wynikają z zastosowania tzw. wzoru ***Żurawskiego***.

Uwaga! Wzór Żurawskiego będzie omawiany w późniejszym terminie, przy okazji analizy jednego z kolejnych zagadnień.