7.2.1.2. Uogólnione (grupowe) siły i przemieszczenia.

Dotychczas, przy ustalaniu związków pomiędzy siłami i przemieszczeniami, operowaliśmy w gruncie rzeczy pojedynczymi wartościami tych wielkości odniesionymi do jednego punktu. Mówiąc np. o przemieszczeniu mieliśmy na myśli przemieszczenie określonego punktu w określonym kierunku.

Czasami wygodnie jest posługiwać się grupą sił, odniesionych do kilku punktów, traktując tę grupę jako jedną siłę. Podobnie możemy mówić o grupowym przemieszczeniu, na które będzie się składała grupa przemieszczeń kilku punktów.

Rozważamy konstrukcję obciążoną siłami zewnętrznymi R, przy czym wektor **R** ma m-składowych. Wprowadzamy związek pomiędzy siłami rzeczywistymi **R** oraz uogólnionymi **Q** w postaci:

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & \cdots & U_{1m} \\ U_{21} & U_{22} & \cdots & U_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ U_{m1} & U_{m2} & \cdots & U_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_m \end{bmatrix}, \tag{7.56}$$

albo

$$\mathbf{R} = \mathbf{U}\,\mathbf{Q}. \tag{7.57}$$

Jeśli (7.56) przedstawia układ równań liniowo niezależnych, wówczas po odwróceniu (7.57) otrzymujemy:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{U}^{-1}\,\mathbf{R} = \mathbf{G}\mathbf{R}, \tag{7.58}$$

gdzie oznaczyliśmy:

$$\mathbf{G} = \mathbf{U}^{-1}. \tag{7.59}$$

Mając grupowe siły możemy znaleźć odpowiadające im przemieszczenia. Wychodzimy ze wspomnianego już warunku równości prac:

$$\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{q} = \mathbf{R}^{\mathrm{T}}\mathbf{r}. \tag{7.60}$$

Po uwzględnieniu (7.58) i przekształceniach mamy:

$$\mathbf{R}^{\mathrm{T}}(\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{q}-\mathbf{r}) = 0. \tag{7.61}$$

Ponieważ $\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$, więc po uwzględnieniu (7.59):

$$\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{q}-\mathbf{r} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{q} = (\mathbf{U}^{-1})^{\mathrm{T}}\mathbf{q}, \tag{7.62}$$

oraz

$$\mathbf{q} = \mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{r}. \tag{7.63}$$

Zależności, analogiczne do wyprowadzonych wyżej, otrzymujemy rozpatrując pojedynczy element konstrukcji. W miejsce obciążenia **R** wstawiamy wektor **S**, a w miejsce przemieszczeń **r** wektor **v**.

Tak więc będziemy mieli:

$$\mathbf{S} = \mathbf{U}\,\mathbf{Q}, \tag{7.57a}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{G}^T\mathbf{q} = (\mathbf{U}^{-1})^T\mathbf{q}, \tag{7.62a}$$

$$\mathbf{q} = \mathbf{U}^T\mathbf{v}. \tag{7.63a}$$

Powyższe zależności posłużą do uzyskania wzoru określającego macierz sztywności elementu **k** w zależności od macierzy sztywności odniesionej do grupowych sił i przemieszczeń $\mathbf{k}_q$.

Dla tych wielkości możemy napisać:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{k}_q\mathbf{q}, \tag{7.64}$$

gdzie $\mathbf{k}_q$ oznacza macierz odniesioną do grupowych sił i przemieszczeń.

Aby otrzymać macierz **k** w zależności od $\mathbf{k}_q$, wychodzimy ze wzoru (7.57a) podstawiając (7.64) oraz (7.63a)

$$\mathbf{S} = \mathbf{U}\mathbf{Q} = \mathbf{U}\,\mathbf{k}_q\mathbf{q} = \mathbf{U}\,\mathbf{k}_q\mathbf{U}^T\mathbf{v}, \tag{7.65}$$

czyli

$$\mathbf{k} = \mathbf{U}\,\mathbf{k}_q\,\mathbf{U}^T \tag{7.66}$$

Warto zauważyć, że dla wykonania działań określonych wzorem (7.66) macierz **U** nie musi być macierzą kwadratową. Wystarczy, aby liczba jej wierszy była równa liczbie składowych sił **S** a liczba kolumn równała się liczbie sił **Q**.

7.2.2. Element tarczy

Rozważać będziemy płaską tarczę o dowolnym konturze. Obszar tarczy można podzielić na elementy podane w tablicy 7.1.

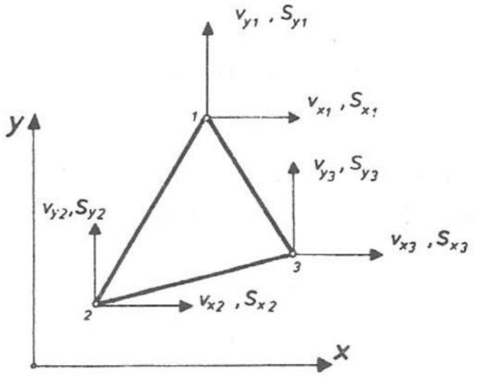
Niezależnie od przyjętego kształtu analiza elementu będzie miała następujące główne fazy:

1. Założenie funkcji opisujących pole przemieszczeń w obszarze elementu w zależności od przemieszczeń węzłów traktowanych jako niewiadome parametry. Zakładane funkcje nazywają się, jak wiemy, funkcjami kształtu. Przypomnijmy, że przy analizie pręta funkcje kształtu były znane jako dokładne rozwiązania odpowiednich równań różniczkowych. W elementach tarczowych będą to funkcje interpolacyjne, zwykle w postaci wielomianów. Będą to więc przybliżone rozwiązania.

2. Obliczenie składowych odkształceń w elemencie poprzez różniczkowanie funkcji opisujących pole przemieszczeń.

3. Wykorzystanie równania prac do wyznaczenia macierzy sztywności elementu tzn. do ustalania związku pomiędzy przemieszczeniami węzłów i odpowiadającymi im siłami.

Zakładamy, że z płaskiej tarczy wydzielony został *element trójkątny* pokazany na rys. 7.16. Przyjmujemy, że elementy połączone są przegubowo w trzech węzłach zlokalizowanych w narożach trójkąta. Z sił oddziaływania i przemieszczeń węzłów tworzymy wektory, grupując oddzielnie składowe pionowe i poziome:



Rys. 7.16

$$S_x = \begin{bmatrix} S_{x1} \\ S_{x2} \\ S_{x3} \end{bmatrix} \qquad S_y = \begin{bmatrix} S_{y1} \\ S_{y2} \\ S_{y3} \end{bmatrix} \tag{7.67}$$

$$v_x = \begin{bmatrix} v_{x1} \\ v_{x2} \\ v_{x3} \end{bmatrix} \qquad v_y = \begin{bmatrix} v_{y1} \\ v_{y2} \\ v_{y3} \end{bmatrix}. \tag{7.68}$$

Przemieszczenie każdego punktu elementu określone jest dwiema składowymi v_x, v_y. Pole przemieszczeń w obszarze elementu możemy opisać za pomocą sześciu parametrów, którymi są przemieszczenia węzłów, oraz założonych funkcji kształtu. Dla uproszczenia procedury uzyskiwania macierzy sztywności wprowadzimy do rozważań grupowe – uogólnione siły i przemieszczenia (por. 7.2.1.2).

Tak więc pole przemieszczeń w obszarze elementu określimy nie za pomocą rzeczywistych przemieszczeń węzłów, ale za pomocą sześciu parametrów zebranych w dwie grupy po trzy parametry każda.

Pole przemieszczeń będzie opisane następująco:

$$\begin{aligned} v_x &= u^T q_x, \\ v_y &= u^T q_y, \end{aligned} \tag{7.69}$$

gdzie:

$$q_x = \begin{bmatrix} q_{x1} \\ q_{x2} \\ q_{x3} \end{bmatrix}$$ – wektor, którego składowymi są trzy parametry związane z przemieszczeniami poziomymi,

$$q_y = \begin{bmatrix} q_{y1} \\ q_{y2} \\ q_{y3} \end{bmatrix}$$ – wektor grupujący parametry związane z przemieszczeniami pionowymi.

Wektor $\mathbf{u}$ zawiera składniki wielomianu przyjętego jako funkcja kształtu. Przy założeniu liniowej zmienności przemieszczeń, wektor ten ma postać:

$$\mathbf{u} = \left\{ 1 \ x \ y \right\}. \tag{7.70}$$

Parametry q_x, q_y traktujemy jako uogólnione przemieszczenia węzłów.

Na podstawie przemieszczeń (7.69) obliczamy odkształcenia:

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{x,x} \\ v_{y,y} \\ v_{x,y} + v_{y,x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{,x}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{u}_{,y}^T \\ \mathbf{u}_{,y}^T & \mathbf{u}_{,x}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix} = \mathbf{B}_q \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix}, \tag{7.71}$$

tutaj

$$\mathbf{B}_q = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]. \tag{7.72}$$

Naprężenia wyrażają się zależnością:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{E}\mathbf{e} = \mathbf{E}\mathbf{B}_q \cdot \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix}. \tag{7.73}$$

Wektor uogólnionych sił węzłowych odpowiadających uogólnionym przemieszczeniom. wyznaczamy z równania prac:

$$\begin{bmatrix} q_x^T & q_y^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \int_V \mathbf{e}^T \sigma \, dV. \tag{7.74}$$

Po podstawieniu (7.71) i (7.73) do wyrażenia pod całkę otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} q_x^T & q_y^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \int_V \begin{bmatrix} q_x^T & q_y^T \end{bmatrix} B_q^T \, E B_q \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix} dV, \tag{7.75}$$

albo po uwzględnieniu, że parametry q_x, q_y są stałe, i po uproszczeniach:

$$\begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix} = \left(\int_V B_q^T \, E B_q \, dV \right) \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix}, \tag{7.76}$$

co można zapisać krótko jako

$$Q = k_q \, q, \tag{7.77}$$

gdzie:

$k_q = \int_V B_q^T \, E B_q \, dV$ – macierz sztywności elementu odniesiona do uogólnionych sił i przemieszczeń,

$Q = \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{bmatrix}$ – wektor o wymiarze 6×1, składowymi którego są uogólnione siły węzłowe,

$q = \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix}$ – wektor o wymiarze 6×1, składowymi którego są uogólnione przemieszczenia węzłów.

Zakładając stałą grubość elementu i wykonując całkowanie po uprzednim przemnożeniu macierzy występujących pod całką, otrzymujemy:

$$k_q = \int_V B_q^T \, E B_q \, dV = \frac{EAh}{1-\nu^2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \nu \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \tag{7.78}$$

tutaj:

A – pole powierzchni trójkąta,

h – grubość elementu.

W praktyce interesują nas jednak rzeczywiste siły i rzeczywiste przemieszczenia, a nie ich uogólnienia. Wprowadzimy więc zależności pomiędzy wielkościami rzeczywistymi i ogólnionymi, mając określone pole przemieszczeń (7.69) oraz założony wektor (7.70). Zależności te przyjmują postać:

$$v_x = \begin{bmatrix} v_{x1} \\ v_{x2} \\ v_{x3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} q_x , \tag{7.79}$$

$$v_y = \begin{bmatrix} v_{y1} \\ v_{y2} \\ v_{y3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} q_y ,$$

albo krócej:

$$\begin{aligned} v_x &= G^T q_x , \\ v_y &= G^T q_y . \end{aligned} \tag{7.80}$$

Po odwróceniu otrzymujemy:

$$\begin{aligned} q_x &= U^T v_x \\ q_y &= U^T v_y , \end{aligned} \tag{7.81}$$

gdzie oznaczyliśmy $U = G^{-1}$.

Możemy teraz podać związek pomiędzy siłami węzłowymi rzeczywistymi i uogólnionymi. Wykorzystując rozważania podane w punkcie 7.2.1.2, a w szczególności wzór (7.57a), możemy napisać:

$$\begin{aligned} S_x &= U\,Q_x , \\ S_y &= U\,Q_y , \end{aligned} \tag{7.82}$$

tutaj oczywiście:

$$S_x = \begin{bmatrix} S_{x1} \\ S_{x2} \\ S_{x3} \end{bmatrix}, \quad S_y = \begin{bmatrix} S_{y1} \\ S_{y2} \\ S_{y3} \end{bmatrix}, \quad Q_x = \begin{bmatrix} Q_{x1} \\ Q_{x2} \\ Q_{x3} \end{bmatrix}, \quad Q_y = \begin{bmatrix} Q_{y1} \\ Q_{y2} \\ Q_{y3} \end{bmatrix}. \tag{7.83}$$

Macierz sztywności elementu, odniesioną do rzeczywistych sił i przemieszczeń otrzymamy wychodząc z równań (7.82) i podstawiając tam (7.77) oraz (7.81)

$$\begin{bmatrix} S_x \\ \\ S_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U & 0 \\ \\ 0 & U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_x \\ \\ Q_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U & 0 \\ \\ 0 & U \end{bmatrix} k_q \begin{bmatrix} q_x \\ \\ q_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U & 0 \\ \\ 0 & U \end{bmatrix} k_q \begin{bmatrix} U^T & 0 \\ \\ 0 & U^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ \\ v_y \end{bmatrix}, \tag{7.84}$$

co można zapisać krótko jako:

$$S = k\,v\,, \tag{7.85}$$

czyli ostatecznie przez porównanie (7.84) i (7.85) mamy:

$$k = \begin{bmatrix} U & 0 \\ \\ 0 & U \end{bmatrix} k_q \begin{bmatrix} U^T & 0 \\ \\ 0 & U^T \end{bmatrix}. \tag{7.86}$$

Jest to wzór umożliwiający określenie macierzy sztywności elementu odniesiony do rzeczywistych wielkości, na podstawie macierzy odniesionej do wielkości uogólnionych.